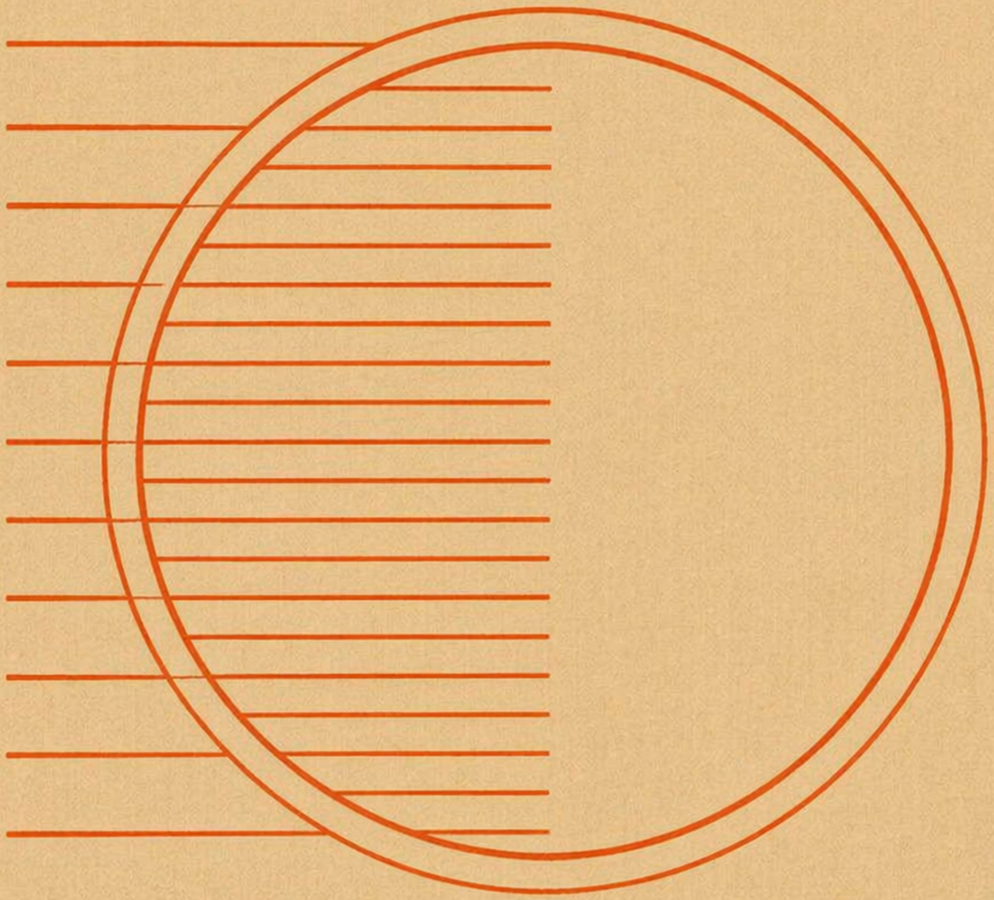
П. С. Моденов

экзаменационные задачи по математике

с анализом их решения



П. С. Моденов

Экзаменационные задачи по математике

с анализом их решения

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1969

Моденов П. С.

М 74 Сборник экзаменационных задач по математике с анализом их решения. М., «Просвещение», 1969.

351 с.

В пособии приведены задачи, предлагавшиеся в 1965—1968 годах на приемных испытаниях по математике на естественные и гуманитарные факультеты Московского государственного университета. Во введении даны некоторые общие соображения, которые рекомендуется использовать при решении уравнений, неравенств и при построении графиков функций. Даны указания о типах задач, составляющих содержание конкурсных экзаменов.

Цель пособия: ознакомить учащихся старших классов средних школ с уровнем и характером требований по математике, предъявляемых поступающим в МГУ на различные факультеты.

2-2-2
350-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение 6

Глава I. Варианты письменных испытаний, 1966 год
§ 1. Механико-математический факультет, 1966 г. 37
§ 2. Физический факультет, 1966 г. 41
§ 3. Химический факультет, 1966 г. 44
§ 4. Геологический факультет, 1966 г. 46
§ 5. Географический факультет, 1966 г. 48
§ 6. Биолого-почвенный факультет, 1966 г. 50
§ 7. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1966 г. 52
§ 8. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1966 г. 54
§ 9. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1966 г. 56
§ 10. Факультет психологии, 1966 г. 59

Глава II. Варианты письменных испытаний, 1967 год
§ 11. Механико-математический факультет, 1967 г. 61
§ 12. Физический факультет, 1967 г. 65
§ 13. Химический факультет, 1967 г. 67
§ 14. Геологический факультет (отделение геофизики), 1967 г. . . 70
§ 15. Географический факультет (отделение почвоведения) и геологический факультет (общее отделение), 1967 г. 71
§ 16. Биолого-почвенный факультет, 1967 г. 74
§ 17. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1967 г. 75
§ 18. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1967 г. 76
§ 19. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1967 г. 78
§ 20. Факультет психологии, 1967 г. 81

Глава III. Ответы, решения и указания к задачам, 1966 год
§ 21. Механико-математический факультет, 1966 г. 85
§ 22. Физический факультет, 1966 г. 105
§ 23. Химический факультет, 1966 г. 137
§ 24. Геологический факультет, 1966 г. 138
§ 25. Географический факультет, 1966 г. . . . . —
§ 26. Биолого-почвенный факультет, 1966 г. 139
§ 27. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1966 г. 140
§ 28. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1966 г. 154
§ 29. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1966 г. 155
§ 30. Факультет психологии, 1966 г. 164

Глава IV. Ответы, решения и указания к задачам, 1967 год
§ 31. Механико-математический факультет, 1967 г. 168
§ 32. Физический факультет, 1967 г. 215
§ 33. Химический факультет, 1967 г. 243
§ 34. Геологический факультет (отделение геофизики), 1967 г. . . 244
§ 35. Географический факультет (отделение почвоведения) и геологический факультет (общее отделение), 1967 г. 254

§ 36. Биолого-почвенный факультет, 1967 г. 254
§ 37. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1967 г. 255
§ 38. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1967 г. 262
§ 39. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1967 г. . . . . —
§ 40. Факультет психологии, 1967 г. 270

Глава V. **Варианты письменных испытаний, 1965 год (с ответами, указаниями, решениями)**
§ 41. Механико-математический факультет, 1965 г. (Задачи для самостоятельного решения) 277
§ 42. Физический факультет, 1965 г. (Задачи для самостоятельного решения) 285
§ 43. Механико-математический факультет, 1965 г. (Решение и обобщение некоторых геометрических задач) 296
§ 44. Физический факультет, 1965 г. (Решение и анализ некоторых геометрических задач) 303

Приложение: экзаменационные задачи по математике за 1968 год (с ответами)

§ 45. Механико-математический факультет, 1968 г. 316
§ 46. Механико-математический факультет (инженерный поток), 1968 г. 322
§ 47 Физический факультет. 1968 г. 324
§ 48. Химический факультет, 1968 г 328
§ 49. Геологический факультет (отделение геофизики), 1968 г. . . 331
§ 50. Геологический факультет (общее отделение), 1968 г. 334
§ 51. Географический факультет, 1968 г. 336
§ 52. Биолого-почвенный факультет, 1968 г. 338
§ 53. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1968 г 341
§ 54. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1968 г. 344
§ 55. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1968 г. 346
§ 56. Факультет психологии, 1968 г. 349

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии приведены задачи, предлагавшиеся в последние годы на приемных испытаниях по математике на естественные и гуманитарные факультеты Московского государственного университета. Во введении даны некоторые общие соображения, которые рекомендуется использовать при решении уравнений, неравенств и при построении графиков функций. Даны указания о типах задач, составляющих содержание конкурсных экзаменов в Московском государственном университете.

Цель пособия: ознакомить учащихся старших классов средних школ с уровнем и характером требований по математике, предъявляемых поступающим в МГУ на различные факультеты. Исходя из этих соображений, в небольшом числе случаев задачи повторены (см. § 14 и 15). Материал, изложенный в этой книге, будет полезен и для поступающих в другие высшие учебные заведения. Необходимость в информации о требованиях на конкурсных экзаменах по математике вызывается еще и тем, что часто абитуриент, приехавший за многие тысячи километров, лишь на месте узнает о своей недостаточной подготовленности по математике.

Выражаю глубокую благодарность за советы и замечания, сделанные к решениям задач, профессору МГУ Ильину Владимиру Александровичу, доценту Новоселову Сергею Иосифовичу и редактору настоящей книги Уманскому Геннадию Сергеевичу.

Чертежи к настоящей работе выполнены Меделяновским Николаем Антоновичем, со свойственным ему исключительным мастерством (все стереометрические чертежи выполнены в аксонометрии).

Автор

ВВЕДЕНИЕ

В книге рассмотрены варианты письменных испытаний по математике за 1965 — 1968 годы, которые были предложены поступавшим на следующие факультеты Московского государственного университета: за 1965 год — на механико-математический и физический факультеты; за 1966 — 1968 годы — на естественные и гуманитарные факультеты (см. оглавление).

Письменные испытания по математике из года в год вызывают наибольшие трудности: процент отсева абитуриентов на письменных экзаменах по математике в несколько раз больше процента отсева на устных экзаменах.

Наиболее трудные задачи по математике предъявлялись к поступавшим на механико-математический, физический, экономический (отделение экономической кибернетики) и филологический (отделение структурной и прикладной лингвистики) факультеты. По этой причине после текстов задач письменных экзаменов на все указанные выше факультеты за 1966 и 1967 годы помещены решения ко всем задачам, предлагавшимся абитуриентам механико-математического, физического, экономического и филологического факультетов (а к более простым — только ответы). К задачам остальных факультетов даны только ответы. Задачи за 1965 и 1968 годы даны в конце книги для самостоятельного решения; к ним даны в основном только ответы. Решения (с некоторыми обобщениями) приведены для геометрических задач механико-математического факультета (за 1965 год) и для части задач (с анализом решения) физического факультета (за 1965 год).

Решения некоторых задач снабжены дополнительными замечаниями, имеющими принципиальное значение, но обычно не акцентируемыми в средней школе. Так, например, при решении уравнений и систем уравнений, при решении задач на вычисление в планиметрии (и стереометрии) учащиеся школ не всегда четко представляют себе вопрос о существовании и единственности решения, а также понятие о необходимости и достаточности (см., например, стр. 114, 115, 119, 121, 129, 130, 135, 153 и др.).

Остановимся на некоторых методических указаниях, относящихся к построению графиков функций, решению рациональных неравенств и иррациональных уравнений. Эти указания являются дополнениями к указаниям, данным по этому поводу в учебниках.

I. При построении графиков функций полезно использовать следующую теорему (доказательство теоремы предоставляется читателю):

если на чертеже построен график Г функции

$$y = f(x),$$

то график функции

$$y = f(x) + a$$

получается переносом графика Г в направлении оси Oy на величину $|a|$, причем перенос осуществляется в положительном направлении оси Oy, если $a > 0$, и в отрицательном, если $a < 0$.

График функции

$$y = kf(x)$$

получается из графика Г, если каждую ординату графика Г умножить на число k. Если $0 < k < 1$, то это преобразование называется *аффинным сжатием* к оси Ox, причем k называется коэффициентом сжатия. При $k > 1$ преобразование также называется аффинным «сжатием» (хотя лучше было бы говорить об аффинном растяжении). Если $k < 0$, то после аффинного сжатия с коэффициентом $|k|$ надо затем отразить симметрично в оси Ox преобразованный график (в частности, графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси Ox).

График функции

$$y = f(x + a)$$

получается переносом Г на величину $|a|$ в направлении оси Ox, причем перенос производится в положительном направлении оси Ox, если $a < 0$, и в отрицательном, если $a > 0$.

График функции

$$y = f(kx)$$

получается аффинным сжатием Г к оси Oy, причем коэффициент сжатия равен $\frac{1}{|k|}$. Если $k < 0$, то после сжатия надо еще произвести симметрию относительно оси Oy.

Именно эти соображения были использованы в книге при построении ряда графиков (см. рисунки 14, 34, 36).

II. При решении неравенств вопрос часто сводится к рациональному неравенству или к системе рациональных неравенств. Напом-

ним читателю, что целой рациональной функцией от одного аргумента x называется функция вида:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

где a_k — числа, а n — любое целое неотрицательное число.

Рациональной функцией называется отношение двух целых рациональных функций $P(x)$ и $Q(x)$:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad (2)$$

мы будем при этом предполагать, что $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней.

Рациональным неравенством называется неравенство $y > 0$ (или $y < 0$), где y — рациональная функция с действительными коэффициентами.

Доказывается, что всякая целая рациональная функция (1) с действительными коэффициентами может быть представлена в виде:

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)^{p_1}\ldots(x-\alpha_s)^{p_s}(x^2+\lambda_1x+\mu_1)^{q_1}\ldots(x^2+\lambda_rx+\mu_r)^{q_r}, \quad (3)$$

где α_k, λ_k, μ_k — действительные числа, p_k, q_k — целые неотрицательные числа и корни всех функций $x^2 + \lambda_kx + \mu_k$ мнимые*. Числа α_k являются всеми действительными корнями функции $P(x)$, причем число p_k называется кратностью корня α_k.

Например:

$$P(x) = x^{12} - 2x^6 + 1 = (x^6 - 1)^2 = (x^3 + 1)^2(x^3 - 1)^2 = \\ = (x+1)^2(x-1)^2(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2.$$

Рассматриваемая функция имеет два действительных корня — 1 и 1, кратность каждого из которых равна 2.

Аналогично имеем:

$$Q(x) = b_0(x-\beta_1)^{m_1}\ldots(x-\beta_t)^{m_t}(x^2+\gamma_1x+\delta_1)^{n_1}\ldots(x^2+\gamma_fx+\delta_f)^{n_f},$$

где β_k, γ_k, δ_k — действительные числа, m_k и n_k — натуральные числа и корни всех функций $x^2 + \gamma_kx + \delta_k$ мнимые. Числа β_k называются действительными полюсами функции (2). Число m_k называется порядком (или кратностью) полюса β_k. Таким образом, всякое рациональное неравенство может быть представлено в виде:

$$\frac{a_0(x-\alpha_1)^{p_1}\ldots(x-\alpha_s)^{p_s}(x^2+\lambda_1x+\mu_1)^{q_1}\ldots(x^2+\lambda_rx+\mu_r)^{q_r}}{b_0(x-\beta_1)^{m_1}\ldots(x-\beta_t)^{m_t}(x^2+\gamma_1x+\delta_1)^{n_1}\ldots(x^2+\gamma_fx+\delta_f)^{n_f}} > 0. \quad (4)$$

---

* В дальнейшем мы в разложении (3) будем сохранять только те множители, степени p_k и q_k которых — *натуральные* числа.

Заметим, что все функции $x^2+\lambda_k x+\mu_k$, $x^2+\gamma_k x+\delta_k$ положительны при всех действительных значениях x (корни всех этих функций по предположению мнимые, а коэффициенты при x^2 равны 1 (>0)). Если x изменяется в интервале, граничными точками которого являются либо два действительных корня y, либо два действительных полюса y, либо один действительный корень и один действительный полюс y, причем внутри этого интервала нет ни одного (конечно, действительного) корня и полюса y, то y в таком интервале сохраняет знак. В двух соседних интервалах y принимает значения противоположных знаков, если общая граничная точка интервалов является действительным корнем или полюсом нечетной кратности, в частности простым корнем (или простым полюсом), когда кратность (соответственно порядок) равна 1. Если же общая граничная точка интервалов является корнем или полюсом четной кратности, то в обоих интервалах y имеет один и тот же знак.

Пример. Решить неравенство:

$$y=\frac{(x+5)(x+2)(x-1)^2}{(x+1)^3(x-2)^2}>0.$$

Корни и полюсы функции y, расположенные в порядке возрастания: $-5, -2, -1, 1, 2$.

Если $x>2$, то $y>0$. Отсюда сразу находим все решения данного неравенства:

$$-5<x<-2,\ -1<x<1,\ 1<x<2,\ x>2;$$

следует учесть, что $x=1$ — корень функции y четной кратности; $x=2$ — полюс y четного порядка; $x=-1$ полюс y нечетного порядка; $x=-2$ и $x=-5$ простые корни y.

III. Решение иррациональных и некоторых трансцендентных неравенств иногда может быть сведено к решению системы рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство:

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}>8-x. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Радикал является действительным числом только при всех следующих значениях x:

$$x\leqslant -2,\ x\geqslant 5.$$

Если $x>8$, то неравенство (1) выполняется. Если или $5\leqslant x\leqslant 8$, или $x\leqslant -2$, то $8-x\geqslant 0$ и, значит, неравенство (1) эквивалентно двум системам неравенств:

$$\left.\begin{array}{r}(x+2)(x-5)>(8-x)^2,\\ 5\leqslant x\leqslant 8\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{r}(x+2)(x-5)>(8-x)^2,\\ x\leqslant -2\end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{r}x>\frac{74}{13},\\ 5\leqslant x\leqslant 8\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{r}x>\frac{74}{13},\\ x\leqslant -2\end{array}\right\}.$$

Вторая система неравенств решений не имеет; первая система неравенств эквивалентна следующей:

$$\frac{74}{13} < x \leqslant 8.$$

Итак, все решения данного неравенства: $x > \frac{74}{13}$.

Пример 2. Неравенство

$$\log_v u > 0,$$

где u и v — функции от x, эквивалентно двум системам неравенств:

$$u > 1, \quad v > 1$$

и

$$0 < u < 1, \quad 0 < v < 1;$$

если u и v — рациональные функции от x, то дело сводится к решению систем рациональных неравенств.

Неравенство

$$\log_v u > 1,$$

где u и v — функции от x, эквивалентно двум системам неравенств ($1 = \log_v v$, $0 < v \neq 1$):

$$v > 1, \quad u > v$$

и

$$0 < v < 1, \quad 0 < u < v.$$

Неравенство

$$\log_w u > \log_w v,$$

где u, v и w—функции от x, эквивалентно двум системам неравенств:

$$w > 1, \; u > v > 0$$

и

$$0 < w < 1, \quad 0 < u < v.$$

Пример 3. Решить неравенство:

$$\log_{|x|} (\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geqslant 1$$

(см. экономический факультет, отделение экономической кибернетики, 1966 год, вариант 1, задача 3).

Р е ш е н и е. На основании общих замечаний, сделанных в предыдущем примере, заключаем, что это неравенство эквивалентно двум системам неравенств ($1 = \log_{|x|} |x|$, $0 < |x| \neq 1$):

1°. $|x| > 1$, $\sqrt{9 - x^2} - x - 1 \geqslant |x|$.

2°. $0 < |x| < 1$, $0 < \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \leqslant |x|$.

Каждая из этих систем распадается на две (считаем один раз $x > 0$, другой раз $x < 0$):

1_1°. $x > 1$, $\sqrt{9 - x^2} \geqslant 2x + 1$.

1_2°. $x < -1$, $\sqrt{9 - x^2} \geqslant 1$.

2_1°. $0 < x < 1$, $0 < \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \leqslant x$.

2_2°. $-1 < x < 0$, $0 < \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \leqslant -x$.

1_1°. Система эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} x > 1, \\ 9 - x^2 \geqslant (2x + 1)^2, \quad \text{(так как } 2x + 1 > 0\text{)}, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} x > 1 \\ 5x^2 + 4x - 8 \leqslant 0, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} x > 1 \\ \frac{-2 - 2\sqrt{11}}{5} \leqslant x \leqslant \frac{-2 + 2\sqrt{11}}{5}. \end{gathered}$$

Эта система не имеет решений.

1_2°. Система эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} x < -1, \\ 9 - x^2 \geqslant 1, \end{gathered}$$

или

$$-2\sqrt{2} \leqslant x < -1.$$

2_1°. Система эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} 0 < x < 1, \\ 5x^2 + 4x - 8 \geqslant 0 \end{gathered}$$

или двум следующим:

$$\left.\begin{gathered} 0 < x < 1, \\ x \leqslant -\frac{2}{5}(1 + \sqrt{11}) \end{gathered}\right\} \text{ и } \left.\begin{gathered} 0 < x < 1 \\ x \geqslant \frac{2}{5}(\sqrt{11} - 1) \end{gathered}\right\}.$$

Первая система не имеет решений. Из второй находим:

$$\frac{2}{5}(\sqrt{11} - 1) \leqslant x < 1.$$

2_2°. Система эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} -1 < x < 0, \\ 9 - x^2 \leqslant 1, \end{gathered}$$

или

$$-1 < x < 0,$$
$$x \leqslant -2\sqrt{2}.$$

Эта система не имеет решений.

Итак, все решения данного неравенства:

$$-2\sqrt{2} \leqslant x < -1,$$
$$\frac{2}{5}(\sqrt{11} - 1) \leqslant x < 1.$$

Пример 4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < 1$$

(см. филологический факультет, 1966 год, вариант 3, задача 3).

Решение. Это неравенство эквивалентно двум следующим системам неравенств $\left(1 = \log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \frac{2\cos x}{\sqrt{3}},\ 0 < \frac{2\cos x}{\sqrt{3}} \neq 1,\right.$

$\left.1 + 2\cos 2x = 4\cos^2 x - 1\right)$:

1°.

$$\frac{2\cos x}{\sqrt{3}} > 1, \quad 0 < \sqrt{4\cos^2 x - 1} < \frac{2\cos x}{\sqrt{3}};$$

2°.

$$0 < \frac{2\cos x}{\sqrt{3}} < 1, \quad \sqrt{4\cos^2 x - 1} > \frac{2\cos x}{\sqrt{3}}.$$

1°. Система эквивалентна следующей:

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$0 < 4\cos^2 x - 1 < \frac{4\cos^2 x}{3}$$

или $(\cos x = u)$

$$u > \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$0 < 4u^2 - 1 < \frac{4u^2}{3},$$
$$-1 \leqslant u \leqslant 1.$$

Эта система неравенств решений не имеет.

2°. Система эквивалентна следующей:

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$4\cos^2 x - 1 > \frac{4\cos^2 x}{3}$$

или ($\cos x = u$)

$$0 < u < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$4u^2 - 1 > \frac{4}{3}u^2,$$

$$-1 \leqslant u \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < u < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$2k\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < x < 2k\pi - \frac{\pi}{6},$$

где k принимает все целые значения.

IV. Остановимся еще на приемах решения иррациональных уравнений, в частности на уравнениях, содержащих параметры. Прежде всего отметим, что при решении иррациональных уравнений* требуется найти только действительные решения, так как если брать значения радикалов из поля комплексных чисел, то каждый радикал имеет несколько значений; левая и правая части иррационального уравнения будут, следовательно, иметь по нескольку значений, а при таких обстоятельствах неясно, считать ли то или иное значение x корнем данного уравнения или нет. То же замечание следует иметь в виду и при решении системы уравнений, среди которых есть хотя бы одно иррациональное. В соответствии со сказанным будем всегда предполагать, что и параметр (или параметры) в иррациональных уравнениях или системах уравнений принимают только действительные значения.

Существуют различные методы решения иррациональных уравнений.

Ниже рассмотрены два примера и дано по нескольку вариантов решения каждого из них. Если метод решения имеет общий характер, то на это обстоятельство дано соответствующее указание.

---

* Как и трансцендентных.

Одним из приемов решения уравнений вида

$$f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0, \tag{1}$$

где f — рациональная функция от двух аргументов (т. е. в левой части уравнения (1) над x, над действительными числами и над радикалом $\sqrt{ax^2+bx+c}$ производят только действия сложения, вычитания, умножения и деления), является следующий метод рационализации, принадлежащий Л. Эйлеру*.

1°. Если $a > 0$, то применяется подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |z + x\sqrt{a}|.$$

2°. Если $c > 0$, то применяется подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |xz + \sqrt{c}|.$$

3°. Если $ax^2 + bx + c = (px + q)(mx + n)$, где p, q, m, n — действительные числа, $p \neq 0$, $m \neq 0$, то применяется одна из подстановок:

$$z = \sqrt{\frac{px+q}{mx+n}} \quad \text{или} \quad z = \sqrt{\frac{mx+n}{px+q}}.$$

1°. $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |z + x\sqrt{a}|.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим эквивалентное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = z^2 + 2zx\sqrt{a} + ax^2,$$

откуда

$$x = \frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{a} \cdot z}. \tag{2}$$

Для любого x, такого, что $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, существует z такое, что это соотношение выполнено. В самом деле, считая $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, из соотношения (2) получаем *следствие*:

$$z^2 + 2\sqrt{a}zx - bx - c = 0,$$

откуда

$$z = -x\sqrt{a} \pm \sqrt{ax^2+bx+c}. \tag{3}$$

Эти значения z не обращают в нуль знаменатель дроби (2), так как при $z = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ мы имеем

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} + x\sqrt{a} = \pm\sqrt{ax^2+bx+c},$$

---

* Идея использования подстановок Эйлера для решения уравнений указанного вида принадлежит Моденову В. П.

откуда

$$\frac{b^2}{4a} + bx + ax^2 = ax^2 + bx + c$$

и, значит,

$$b^2 - 4ac = 0$$

вопреки предположению ($b^2 - 4ac \neq 0$).

Значит, (3) — корни уравнения (2) при заданном x.

Теперь имеем:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left| z + \sqrt{a}\ \frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,z} \right| = \left| \frac{-\sqrt{a}\,z^2 + bz - c\sqrt{a}}{b - 2\sqrt{a}\,z} \right|,$$

и уравнение (1) обращается в рациональное относительно z.

2°. Уравнение

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |xz + \sqrt{c}|$$

эквивалентно следующему:

$$ax^2 + bx + c = x^2z^2 + 2xz\sqrt{c} + c.$$

Если $x \neq 0$ (надо проверить, является $x = 0$ корнем уравнения (1) или нет; тем самым это значение x исключается из рассмотрения), то

$$ax + b = xz^2 + 2z\sqrt{c},$$

откуда

$$x = \frac{2z\sqrt{c} - b}{a - z^2}. \tag{4}$$

Для любого $x \neq 0$ ($ax^2 + bx + c \geqslant 0$) существует z такое, что выполняется равенство (4). В самом деле, из равенства (4) следует:

$$xz^2 + 2z\sqrt{c} - b - ax = 0,$$

$$z = \frac{-\sqrt{c} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x}. \tag{5}$$

Эти значения z не обращают в нуль знаменатель дроби (4). В самом деле, если бы было $z = \pm\sqrt{a}$, то

$$\pm x\sqrt{a} + \sqrt{c} = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c},$$

откуда

$$ax^2 \pm 2\sqrt{ac}\,x + c = ax^2 + bx + c,$$

и так как $x \neq 0$, то $b = \pm 2\sqrt{ac}$, т. е. $b^2 - 4ac = 0$ вопреки предположению. Значит, соотношениями (5) даются корни уравнения (4) при заданном x.

Теперь имеем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left|z\frac{2z\sqrt{c}-b}{a-z^2}+\sqrt{c}\right|,$$

и уравнение (1) обращается в рациональное относительно z.

3°. Уравнение

$$z=\sqrt{\frac{px+q}{mx+n}}\qquad (z\geqslant 0)$$

эквивалентно следующему:

$$\frac{px+q}{mx+n}=z^2,$$

откуда*

$$x=\frac{nz^2-q}{p-mz^2}.$$

Далее,

$$\sqrt{\frac{px+q}{mx+n}}=\frac{\sqrt{(px+q)(mx+n)}}{|mx+n|}=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|mx+n|}=z,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z|mx+n|=z\left|m\frac{nz^2-q}{p-mz^2}+n\right|,$$

и уравнение (1) обращается в рациональное** относительно z.

Пример 1. Решить уравнение

$$x+\sqrt{1-x^2}=a, \tag{1}$$

где a — действительный параметр.

Способ первый (получение следствия из данного уравнения). Этот способ, широко распространенный в средней школе, состоит в том, что из данного уравнения получают *следствие* (необходимый признак). При таком методе решения нужно проверять, будут ли значения x, полученные в результате перехода от данного уравнения к следствиям из него, решениями начального уравнения. Итак, переписывая уравнение (1) в виде

$$\sqrt{1-x^2}=a-x, \tag{2}$$

получаем *следствие*:

$$1-x^2=a^2-2ax+x^2,$$

или

$$2x^2-2ax+a^2-1=0.$$

---

* Читателю предлагается убедиться, что $p-mz^2\neq 0$ $(pn-mq\neq 0)$.

** Моденовым В. П. с успехом применены для решения иррациональных уравнений и многие другие рационализирующие подстановки, применяемые в интегральном исчислении при вычислении интегралов от элементарных функций.

Для того чтобы это уравнение имело действительные корни, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\Delta = a^2 - 2(a^2 - 1) = 2 - a^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}. \tag{3}$$

Предполагая, что это условие выполнено, находим:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Теперь необходимо проверить, какое из найденных значений x будет решением уравнения (1) или (2).

Пусть

$$x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Вычислим при этом значении x левую часть уравнения (2):

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2 + 2a\sqrt{2 - a^2} + 2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2 - 2a\sqrt{2 - a^2}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a - \sqrt{2 - a^2})^2}{4}} = \frac{|a - \sqrt{2 - a^2}|}{2}.$$

Вычислим правую часть уравнения (2):

$$a - x = a - \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Значит $x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$ будет корнем данного уравнения только тогда, когда

$$a - \sqrt{2 - a^2} \geqslant 0,$$

так как только в этом случае $|a - \sqrt{2 - a^2}| = a - \sqrt{2 - a^2}$ и равенство (2) будет выполнено. Если же $a - \sqrt{2 - a^2} < 0$, то $\sqrt{1 - x^2} = \frac{|a - \sqrt{2 - a^2}|}{2} > 0$, а $a - x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2} < 0$ и, значит, $x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$ не корень данного уравнения.

Неравенство $a - \sqrt{2 - a^2} \geqslant 0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$a \geqslant \sqrt{2 - a^2}.$$

Так как $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то при $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 0$ это неравенство не выполняется, а при $0 < a \leqslant \sqrt{2}$ оно эквивалентно такому:

$$a^2 \geqslant 2 - a^2,$$

откуда

$$a^2 \geqslant 1,$$

и так как $0 < a \leqslant \sqrt{2}$, то из неравенства $a^2 \geqslant 1$ следует, что $a \geqslant 1$. Итак, только при $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$ $x = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$ — корень данного уравнения. Если же $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$, то $x = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$ не корень данного уравнения.

Перейдем к исследованию значения

$$x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2 - 2a\sqrt{2-a^2}+2-a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+2a\sqrt{2-a^2}}{4}} = \sqrt{\frac{(a+\sqrt{2-a^2})^2}{4}} = \frac{|a+\sqrt{2-a^2}|}{2},$$

$$a - x = a - \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2} = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Значит, $x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ будет корнем данного уравнения только тогда, когда $a+\sqrt{2-a^2} \geqslant 0$. Если же $a+\sqrt{2-a^2} < 0$, то $x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ не корень данного уравнения.

Соотношение $a+\sqrt{2-a^2} \geqslant 0$ будет выполнено только тогда, когда $\sqrt{2-a^2} \geqslant -a$.

Если $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то это неравенство выполнено. Если же $-\sqrt{2} \leqslant a < 0$, то оно эквивалентно такому:

$$2 - a^2 \geqslant a^2,$$
$$a^2 \leqslant 1,$$
$$|a| \leqslant 1,$$

и так как $-\sqrt{2} \leqslant a < 0$, то неравенство $|a| \leqslant 1$ принимает вид $-a \leqslant 1$, т. е. $a \geqslant -1$.

Таким образом, $x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ — корень данного уравнения, если $-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

Окончательно,

если $-\sqrt{2} \leqslant a < -1$, то уравнение не имеет корней; если $-1 \leqslant a < 1$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$;

если $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то уравнение имеет корни $x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}$.

Способ второй. Положим $\sqrt{1 - x^2} = y$.

Тогда данное уравнение примет вид:

$$x + y = a.$$

Уравнение $\sqrt{1 - x^2} = y$ эквивалентно следующей смешанной системе:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geqslant 0.$$

Данное уравнение

$$x + \sqrt{1 - x^2} = a \tag{4}$$

эквивалентно смешанной системе:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

в следующем смысле: если x — действительный корень уравнения (4), то существует решение (x, y) системы (5) (где $y = \sqrt{1 - x^2}$); обратно: если (x, y) — действительное решение системы (5), то x — решение уравнения (4). Система (5) *эквивалентна* следующей:

$$\begin{cases} x + y = a. \\ (x + y)^2 - 2xy = 1, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \frac{a^2 - 1}{2}, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что x и y — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a\lambda + \frac{a^2 - 1}{2} = 0$$

или

$$2\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - 1 = 0, \tag{6}$$

причем для y следует взять неотрицательный корень.

Вычисляя дискриминант уравнения (6), получим:

$$\Delta = a^2 - 2(a^2 - 1) = 2 - a^2.$$

Уравнение (6) имеет действительные корни только тогда, когда

$$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

Далее, если $-\sqrt{2} \leqslant a < -1$, то корни уравнения (6) отрицательны и, значит, данное уравнение не имеет корней. Если $a = -1$, то $\lambda_1 = 0\ (=y)$, $\lambda_2 = -1 = x$ — уравнение имеет один корень $x = -1$. Если $-1 < a < 1$, то корни уравнения (6) разных знаков; корень данного уравнения — это отрицательный корень уравнения (6), т. е. $x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$.

Если $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то оба корня уравнения (6) неотрицательны и, значит, данное уравнение имеет корни $x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}$.

Этот способ решения иррациональных уравнений имеет общий характер; он заключается в получении рациональной смешанной системы, эквивалентной данному уравнению в указанном смысле.

Способ третий (метод смешанных систем). Перепишем данное уравнение в виде:

$$\sqrt{1 - x^2} = a - x. \tag{7}$$

Корнями этого уравнения могут служить только числа из сегмента $-1 \leqslant x \leqslant 1$, для которых $a \geqslant x$. Таким образом, уравнение (7) эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\begin{gathered} 1 - x^2 = (a - x)^2, \\ a \geqslant x. \end{gathered} \tag{8}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что если x — действительное число, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$; поэтому это условие и не включено в систему (8).

Система (8) может быть переписана в виде:

$$\begin{gathered} 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ a \geqslant x. \end{gathered} \tag{9}$$

Необходимое и достаточное условие действительности корней уравнения, входящего в смешанную систему (9), таково:

$$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

Если $a = -\sqrt{2}$, то $x_1 = x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; условие $a \geqslant x$ не выполняется, и, значит, при $a = -\sqrt{2}$ данное уравнение не имеет корней.

Если $a = \sqrt{2}$, то $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, условие $a > x$ выполняется, и, значит, при $a = \sqrt{2}$ уравнение имеет один корень $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пусть $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$. Тогда уравнение

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

имеет действительные и различные корни. Это уравнение имеет корень $x = a$ только тогда, когда $2a^2 - 2a^2 + a^2 - 1 = 0$, т. е. при

$a = -1$ и $a = 1$. Таким образом, соотношение $x = a$ выполняется только тогда, когда или $a = -1$, или $a = 1$; обратно: если $a = -1$ или $a = 1$, то данное уравнение имеет корни, равные $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$, $x = 0$.

Будем считать, что

$$-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \quad a \neq -1, \; a \neq 1.$$

Тогда уравнение

$$f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \tag{10}$$

имеет действительные и различные корни x_1 и x_2, причем ни один из них не равен a. Данное уравнение имеет при этом корни в двух случаях:

1°. $x_1 < a < x_2$.

2°. $x_1 < x_2 < a$.

В случае 1° корнем будет $x = x_1$; в случае 2° $x = x_1$ и $x = x_2$.

Соотношения 1° выполняются только тогда, когда

$$f(a) < 0,$$

т. е.

$$2a^2 - 2a^2 + a^2 - 1 < 0,$$

т. е.

$$-1 < a < 1.$$

При этих условиях данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Соотношения 2° выполняются только тогда, когда

$$f(a) = 2a^2 - 2a^2 + a^2 - 1 > 0 \quad \text{и} \quad 4a - 2a > 0,$$

т. е. (учитывая, что $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$) $1 < a < \sqrt{2}$. В этом случае данное уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

При этом решении задачи использовалась следующая теорема: если уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — действительные числа, имеет действительные и различные корни x_1 и x_2, то необходимое и достаточное условие того, что действительное число λ меньше обоих корней, может быть записано в виде:

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \quad 2\lambda + p < 0.$$

Необходимое и достаточное условие того, что число λ заключено между корнями x_1 и x_2, может быть записано в виде:

$$\lambda^2 + p\lambda + q < 0;$$

и, наконец, необходимое и достаточное условие того, что число λ больше обоих корней, может быть записано в виде:

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \quad 2\lambda + p > 0.$$

В самом деле,

1°. $\lambda < x_1$, $\lambda < x_2$ только тогда, когда $\lambda - x_1 < 0$, $\lambda - x_2 < 0$. Но два числа отрицательны только тогда, когда их произведение положительно, а сумма отрицательна:

$$(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) > 0, \quad \lambda - x_1 + \lambda - x_2 < 0,$$

или

$$\lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + x_1x_2 > 0, \quad 2\lambda - (x_1 + x_2) < 0,$$

и так как по формулам Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то окончательно

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \quad 2\lambda + p < 0.$$

2°. Число λ заключено между числами x_1 и x_2 только тогда, когда $\lambda - x_1$ и $\lambda - x_2$ — числа разных знаков, т. е. только тогда, когда $(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) < 0$, или $\lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + x_1x_2 < 0$, или $\lambda^2 + p\lambda + q < 0$.

3°. Число λ больше обоих корней x_1 и x_2 только тогда, когда $\lambda - x_1 > 0$, $\lambda - x_2 > 0$. Но два числа положительны только тогда, когда их произведение и сумма положительны, т. е.

$$(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) > 0,$$
$$\lambda - x_1 + \lambda - x_2 > 0,$$

или

$$\lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + x_1x_2 > 0,$$
$$2\lambda - (x_1 + x_2) > 0,$$

или

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0,$$
$$2\lambda + p > 0.$$

Замечание. Имеет место аналогичная теорема и для уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$ и корни x_1 и x_2 этого уравнения действительны и различны. В случае $a > 0$ утверждения аналогичны доказанным, только $\lambda^2 + p\lambda + q$ и $2\lambda + p$ заменяются соответственно на $a\lambda^2 + b\lambda + c$ и $2a\lambda + b$. В случае $a < 0$ во всех утверждениях 1°, 2°, 3°, помимо этой замены, надо все неравенства изменить на противоположные. Доказательство представляется читателю (надо уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ заменить ему эквивалентным $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ и воспользоваться уже доказанной теоремой).

Эта теорема с успехом применяется при исследовании квадратных уравнений, коэффициенты которых являются функциями от одного параметра.

Читателю предлагается дать геометрическую интерпретацию этой теоремы (следует заметить, что $x = -\frac{p}{2}$ есть абсцисса вершины параболы $y = x^2 + px + q$).

Способ четвертый (метод рационализации). Полагая (вторая подстановка Эйлера)

$$\sqrt{1-x^2} = |1 - zx|,$$

находим

$$1 - x^2 = 1 - 2xz + z^2x^2; \qquad (A)$$

$x = 0$ является корнем данного уравнения только при $a = 1$; в этом случае данное уравнение принимает вид:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - x,$$

или

$$\sqrt{(1-x)(1+x)} = 1 - x.$$

Один из его корней $x = 1$; другой находится из уравнения

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x},$$

откуда $x = 0$. Итак, при $a = 1$ данное уравнение имеет корни $x = 0$ и $x = 1$; если же $a \neq 1$, то $x = 0$ не корень данного уравнения.

Считая $a \neq 1$, из соотношения (A) находим:

$$-x = -2z + z^2x,$$

откуда

$$x = \frac{2z}{1+z^2}$$

и, значит,

$$\sqrt{1-x^2} = \left|1 - \frac{2z^2}{1+z^2}\right| = \frac{|1-z^2|}{1+z^2}.$$

Данное уравнение принимает вид:

$$\frac{2z}{1+z^2} + \frac{|1-z^2|}{1+z^2} = a. \qquad (B)$$

На сегменте $[-1, 1]$ функция от z:

$$x = \frac{2z}{1+z^2}$$

возрастает и принимает все значения из сегмента $[-1, 1]$.

Значит, в уравнении (B) можно считать $|z| \leqslant 1$ и переписать его в виде:

$$\frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2} = a,$$

или

$$(a+1)z^2 - 2z + a - 1 = 0. \qquad (C)$$

При $a = -1$ данное уравнение принимает вид:

$$\sqrt{1-x^2} = -1 - x$$

и имеет только один корень $x = -1$. Будем считать, что $a \neq -1$. Тогда (C)— квадратное уравнение относительно z, и надо найти его корни такие, что $|z| \leqslant 1$. Тогда $x = \frac{2z}{1+z^2}$.

Уравнение (C) имеет корни $z = \pm 1$ только тогда, когда

$$a + 1 \pm 2 + a - 1 = 0,$$

т. е. при $a = \pm 1$ — случай, который исследован. Считая $a \neq 1$, $a \neq -1$, перепишем уравнение (C) в виде:

$$z^2 - \frac{2}{a+1}\, z + \frac{a-1}{a+1} = 0. \qquad (C_1)$$

Числа -1 и 1 не являются его корнями.
Корни уравнения (C) действительны только тогда, когда

$$1 - a^2 + 1 \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad -\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

Если $a = -\sqrt{2}$, то $z_1 = z_2 = \frac{1}{a+1} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 1$,

значит, при $a = -\sqrt{2}$ данное уравнение не имеет корней. Если $a = \sqrt{2}$, то $z_1 = z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$, значит,

$$x = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1+3-2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пусть $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ и $a \neq 1$, $a \neq -1$. Тогда корни уравнения (C) или (C_1) действительны, различны и ни один из них не равен ни -1, ни 1.
Мы будем иметь

$$-1 < z_1 < 1 < z_2$$

только тогда, когда

$$1 - \frac{2}{a+1} + \frac{a-1}{a+1} < 0,$$

$$1 + \frac{2}{a+1} + \frac{a-1}{a+1} > 0,$$

или

$$\frac{a-1}{a+1} < 0,$$

т. е.

$$-1 < a < 1.$$

При этих условиях уравнение (C) имеет только один корень, такой, что $|z| < 1$ $(z = z_1)$:

$$z = \frac{1 - \sqrt{2 - a^2}}{a + 1},$$

а, значит, данное уравнение имеет только один корень:

$$x = 2 \frac{\frac{1 - \sqrt{2 - a^2}}{a + 1}}{1 + \frac{3 - a^2 - 2\sqrt{2 - a^2}}{(a + 1)^2}} =$$

$$= 2(a + 1) \frac{1 - \sqrt{2 - a^2}}{a^2 + 2a + 1 + 3 - a^2 - 2\sqrt{2 - a^2}} =$$

$$= 2(a + 1) \frac{1 - \sqrt{2 - a^2}}{4 + 2a - 2\sqrt{2 - a^2}} = (a + 1) \frac{1 - \sqrt{2 - a^2}}{2 + a - \sqrt{2 - a^2}} =$$

$$= (a + 1) \frac{(1 - \sqrt{2 - a^2})(2 + a + \sqrt{2 - a^2})}{4 + 4a + a^2 - 2 + a^2} = \frac{2 + a - 2 + a^2 - (a + 1)\sqrt{2 - a^2}}{2(a + 1)} =$$

$$= \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Далее, условия $-1 < z_1 < z_2 < 1$ будут выполнены только тогда, когда

$$1 + \frac{2}{a + 1} + \frac{a - 1}{a + 1} > 0,$$

$$-2 - \frac{2}{a + 1} < 0,$$

$$1 - \frac{2}{a + 1} + \frac{a - 1}{a + 1} > 0,$$

$$2 - \frac{2}{a + 1} > 0,$$

или

$$\frac{a + 2}{a + 1} > 0,$$

$$\frac{a - 1}{a + 1} > 0,$$

$$\frac{a}{a + 1} > 0.$$

Учитывая, что еще должны быть выполнены условия

$$-\sqrt{2} < a < \sqrt{2},$$

заключаем, что

$$1 < a < \sqrt{2}.$$

В этом случае оба корня уравнения (*C*) по модулю меньше 1:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{2 - a^2}}{a + 1},$$

а, значит, данное уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{2z}{1 + z^2} = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Наконец, случай

$$z_1 < -1 < z_2 < 1$$

имеет место только тогда, когда

$$1 + \frac{2}{a+1} + \frac{a-1}{a+1} < 0,$$
$$1 - \frac{2}{a+1} + \frac{a-1}{a+1} > 0.$$

Первое неравенство не выполняется: его левая часть равна 2.

Применим еще третью подстановку Эйлера:

$$z = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad z > 0$$

(данное уравнение имеет корень $x = -1$ только при $a = -1$ и корень $x = 1$ только при $a = 1$; считаем $a \neq -1$, $a \neq 1$; тогда $x = -1$ и $x = 1$ не корни данного уравнения).

Имеем:

$$z^2 = \frac{1-x}{1+x},$$
$$x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Далее

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}(1+x)^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,|1 + x| =$$
$$= z\,|1 + x| = z\left|1 + \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right| = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Данное уравнение принимает вид:

$$\frac{1 - z^2}{1 + z^2} + \frac{2z}{1 + z^2} = a$$

или

$$(a + 1)\,z^2 - 2z + a - 1 = 0. \qquad (D)$$

Корни этого уравнения действительны только тогда, когда $2-a^2 \geqslant 0$, т. е. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. При $a=-\sqrt{2}$ $z=\frac{1}{a+1}=$

$=\frac{1}{-\sqrt{2}+1}=-\sqrt{2}-1<0$ и, значит, данное уравнение не имеет корней.

При $a=\sqrt{2}$ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Пусть $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, $a \neq -1$, $a \neq 1$; тогда корни уравнения (D) действительны и различны и ни один из них не равен 0.

Нам следует взять только положительные корни. Так как

$$z_1+z_2=\frac{2}{a+1}, \qquad z_1 z_2=\frac{a-1}{a+1},$$

то при

$$\frac{a-1}{a+1}<0, \quad \text{т. е.} \quad -1<a<1,$$

корни z_1 и z_2 разных знаков; берем

$$z=\frac{1+\sqrt{2-a^2}}{a+1}.$$

Данное уравнение имеет только один корень:

$$x=\frac{1-\frac{3-a^2+2\sqrt{2-a^2}}{(a+1)^2}}{1+\frac{3-a^2+2\sqrt{2-a^2}}{(a+1)^2}}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1-3+a^2-2\sqrt{2-a^2}}{a^2+2a+1+3-a^2+2\sqrt{2-a^2}}=\frac{2a^2+2a-2-2\sqrt{2-a^2}}{2a+4+2\sqrt{2-a^2}}=$$

$$=\frac{a^2+a-1-\sqrt{2-a^2}}{a+2+\sqrt{2-a^2}}=$$

$$=\frac{a^3+a^2-a+2a^2+2a-2+2-a^2-\sqrt{2-a^2}(a^2+2a+1)}{a^2+4a+4-2+a^2}=$$

$$=\frac{a^3+2a^2+a-(a+1)^2\sqrt{2-a^2}}{2(a+1)^2}=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Если же

$$\frac{a-1}{a+1}>0, \qquad \frac{2}{a+1}>0,$$

т. е.

$$1<a<\sqrt{2},$$

то оба корня

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{2 - a^2}}{a + 1}$$

уравнения (D) положительны, и данное уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

*Способ пятый** (замена переменной). Перепишем данное уравнение так:

$$\sqrt{1 - x^2} = a - x$$

или

$$\sqrt{1 - [(a - x) - a]^2} = a - x$$

и положим $a - x = z$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{1 - a^2 + 2az - z^2} = z.$$

Корнями этого уравнения могут быть только неотрицательные значения z; оно эквивалентно следующей смешанной системе:

$$1 - a^2 + 2az - z^2 = z^2,$$
$$z \geqslant 0,$$

или

$$2z^2 - 2az + a^2 - 1 = 0, \qquad (11)$$
$$z \geqslant 0.$$

Уравнение $2z^2 - 2az + a^2 - 1 = 0$ имеет действительные корни только тогда, когда

$$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

Если $-\sqrt{2} \leqslant a < -1$, то оба корня уравнения отрицательны, и, значит, данное уравнение не имеет корней. Если $a = -1$, то $z = 0$, $z = -1$; корнем данного уравнения является $x = a - z = -1 - 0 = -1$. Если $-1 < a < 1$, то корни уравнения (11) разных знаков, а так как $z \geqslant 0$, то

$$z = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2},$$

и, значит,

$$x = a - z = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

---

* Этот способ, а также способ шестой (см. ниже) не имеют такого общего характера, как первые четыре. «Замена переменной» является искусственным приемом решения конкретного уравнения, с использованием его специфичности.

Если $a = 1$, то $z = 0$, $z = 1$ и, значит, $x = 1$, $x = 0$.

Если $1 < a \leqslant \sqrt{2}$, то оба корня уравнения (11) положительны,

$$z = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

и, значит,

$$x = a - z = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Способ шестой (тригонометрическая подстановка). Так как область определения функции $\sqrt{1 - x^2}$ есть сегмент $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то можно положить $x = \sin t$ и считать, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Данное уравнение примет вид:

$$\sin t + \cos t = a.$$

Поделив обе части на $\sqrt{2}$, приведем его к виду:

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}. \qquad (12)$$

Отсюда видно, что если $|a| > \sqrt{2}$, то данное уравнение не имеет решений. Пусть $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. В силу соотношений $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем: $-\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

При этих значениях t имеем: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$,

т. е. для того чтобы данное уравнение имело корни, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant 1, \text{ или } -1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}.$$

Значит, если $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$, то данное уравнение корней не имеет. Пусть $-\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$, т. е. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$; отсюда $-1 \leqslant a < 1$. Тогда данное уравнение имеет один корень

$$t + \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$t = \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4},$$

$$x = \sin t = \sin\left(\arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Если же $\frac{\pi}{4} \leqslant t + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$, или $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, т. е. $1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, то уравнение имеет два корня:

1) $t + \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$;

2) $t + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}}$, откуда $t = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$x = \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Способ седьмой (геометрическое решение). Решение уравнения

$$\sqrt{1 - x^2} + x = a$$

может быть сведено к нахождению абсцисс точек пересечения двух линий:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = a - x.$$

Первое уравнение есть уравнение единичной полуокружности:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geqslant 0 \tag{1}$$

(читателю рекомендуется сделать чертеж).

Второе уравнение

$$x + y = a \tag{2}$$

есть уравнение прямой, параллельной биссектрисе угла II и IV четвертей и отсекающей на осях координат равные отрезки.

Если $a < -1$, то эти линии не пересекаются; данное уравнение не имеет корней.

Если $a = -1$, то эти линии пересекаются в одной точке $(-1, 0)$; уравнение имеет один корень: $x = -1$.

Если $-1 < a < 1$, то эти линии пересекаются в одной точке; ее абсциссу, т. е. корень данного уравнения, найдем, решая систему (1), (2) и выбирая для x меньшее значение корня:

$$x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Если $a = 1$, то линии (1), (2) пересекаются в двух точках: (0,1) и (1, 0); уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = 1$.

Если $1 < a < \sqrt{2}$, то линии (1) пересекаются в двух точках; их абсциссы являются корнями данного уравнения:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Если $a = \sqrt{2}$, то прямая (2) касается полуокружности (1) в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Наконец, если $a > \sqrt{2}$, то линии (1) и (2) не пересекаются. Данное уравнение не имеет корней.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{x}, \tag{1}$$

где

$$a > b > 0.$$

Р е ш е н и е. Корнями данного уравнения могут быть только числа из полуинтервала:

$$0 < x \leqslant b.$$

Уравнение (1) эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\sqrt{\frac{a}{x} - 1} + \sqrt{\frac{b}{x} - 1} = 1,$$

$$0 < x \leqslant b.$$

Полагая

$$\sqrt{\frac{a}{x} - 1} = u, \quad \sqrt{\frac{b}{x} - 1} = v,$$

получим:

$$\left.\begin{array}{l} u + v = 1, \\ \frac{a}{x} = u^2 + 1, \\ \frac{b}{x} = v^2 + 1, \\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

(условие $0 < x \leqslant b$ следует из уравнения $\frac{b}{x} = v^2 + 1$).

Система (2) эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{array}{c} u + v = 1, \\ \frac{a}{b}(v^2 + 1) = (1 - v)^2 + 1, \\ \frac{b}{x} = v^2 + 1, \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \end{array}\right\}$$

или

$$u + v = 1,$$
$$(a - b)\, v^2 + 2bv + a - 2b = 0,$$
$$\frac{b}{x} = v^2 + 1, \quad u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0.$$

Если $a > 2b$, то уравнение

$$(a - b)\, v^2 + 2bv + a - 2b = 0$$

в случае, если даже оно имеет действительные корни, имеет только отрицательные корни ($a - b > 0$, $b > 0$, $a - 2b > 0$), и, значит, в случае $a > 2b$ данное уравнение не имеет решений. Если $a = 2b$, то уравнение $(a - b)\, v^2 + 2bv + a - 2b = 0$ имеет корни $v = 0$ и $v = -2$. При $v = 0$ $u = 1$ и из соотношения $\frac{b}{x} = v^2 + 1$ находим единственный корень $x = b$ данного уравнения. Если $a < 2b$, то корни уравнения

$$f(v) = (a - b)\, v^2 + 2bv + a - 2b = 0$$

разных знаков; так как

$$f(1) = a - b + 2b + a - 2b = 2a - b > 0,$$

то положительный корень v этого уравнения меньше 1, а тогда $u > 0$. Положительный корень

$$v = \frac{-b + \sqrt{-a^2 - b^2 + 3ab}}{a - b},$$

и, значит, данное уравнение имеет единственный корень:

$$x = \frac{b}{v^2 + 1} = \frac{b(a - b)^2}{b^2 + ab - 2b\sqrt{-a^2 - b^2 + 3ab}} =$$
$$= \frac{b(a - b)^2 (b^2 + ab + 2b\sqrt{-a^2 - b^2 + 3ab})}{b^4 + 2b^3 a + a^2 b^2 + 4a^2 b^2 + 4b^4 - 12ab^3} =$$
$$= \frac{\cdot\, b(a - b)^2 (ab + b^2 + 2b\sqrt{-a^2 - b^2 + 3ab})}{5b^2 (a - b)^2} =$$
$$= \frac{a + b + 2\sqrt{-a^2 - b^2 + 3ab}}{5}.$$

V. Заметим, что корнями уравнения вида

$$u(x)^{v(x)} = 1$$

являются те корни уравнения $v(x) = 0$, при которых $u(x)$ — число, не равное нулю, и те корни уравнения $u(x) = 1$, при которых $v(x)$ — действительное число.

VI. Дадим еще характеристику типов задач, в первую очередь тех, которые предлагались на следующих факультетах: механико-математическом, физическом, экономическом (отделение экономи-

ческой кибернетики) и филологическом (отделение структурной и прикладной лингвистики).

Во-первых, достаточно часто даются задачи с параметрами и на уравнения и на неравенства. Поступающий должен исследовать область изменения параметров, в которой данное уравнение или неравенство имеет то или иное решение.

Далее (на всех факультетах), часто приходится находить область определения функции (а если дана задача с параметрами, то приходится иногда находить область определения функции от двух аргументов).

Даются задачи на логарифмические уравнения и неравенства, где основанием является функция (а не число).

Достаточно часто предлагаются вопросы на трансцендентные уравнения и неравенства (иногда с параметрами).

Иногда решение уравнения сочетается с решением неравенства ($f(x) \geqslant 0$).

Предлагаются и системы неравенств и даже системы неравенств с параметром—см., например, задачи на стр. 70, которые были предложены в 1967 г. поступающим на отделение геофизики геологического факультета; интересна геометрическая интерпретация их решений.

На механико-математическом факультете в 1967 г. были даны интересные и достаточно тонкие по замыслу задачи (№ 3), а для получающегося при этом тригонометрического неравенства с двумя неизвестными требовалось дать геометрическую интерпретацию. В том же 1967 г. на механико-математическом факультете задачи по геометрии во всех вариантах были построены единообразно и по замыслу и по методу их решения; естественный ход решения этих задач заставляет расчленить задачу на ряд вспомогательных предложений: вывод формулы для площади сферического «двуугольника» и части сферы, сводящейся к вычислению площади двуугольника; затем вывод формулы для площади сферического треугольника и формулы для объема «пирамиды», «основанием» которой является сферический треугольник $\overset{\frown}{ABC}$, а боковыми гранями — круговые секторы $\overset{\frown}{OAB}$, $\overset{\frown}{OBC}$ и $\overset{\frown}{OCA}$ (O — центр сферы, на которой лежит сферический треугольник ABC). После всего этого надо было проделать еще ряд выкладок (уже достаточно шаблонных). В целом это, конечно, трудно, тем более что в одной из задач такого типа в ответ входил $\cos\frac{8\pi}{15} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right)$; отметим, что $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$ выражаются в радикалах из рациональных (и даже целых) чисел.

Не оставляются без внимания и задачи по арифметике — см., например, задачи на стр. 75, 76, данные в 1967 г. на отделении экономической кибернетики экономического факультета (см. также ин-

тересные, нешаблонные задачи, связанные с комплексными числами, стр. 52, 53, 54).

В последние годы даются системы уравнений (иногда трансцендентных), где число уравнений не равно числу неизвестных. Так, например, в 1967 г. на отделении экономической кибернетики экономического факультета была предложена система:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 z = 1$$

(см. также стр. 76).

На отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета (да и на других факультетах) предлагались нешаблонные задачи по комбинаторике.

В целом по различным факультетам МГУ охватывалась вся программа по математике для поступающих в высшие учебные заведения, причем было немало задач, в которых дело не сводилось к шаблону — к чисто техническим преобразованиям. Во многих задачах от поступающего требовалось проявить некоторую инициативу в выборе метода решения, проявить некоторую изобретательность.

Касаясь вопроса о решении многих геометрических задач на вычисление, следует отметить, что условия подобного рода задач можно интерпретировать двояко:

1°. По заданным известным элементам некоторой существующей фигуры (построенной, имеющейся в природе или в технических конструкциях) вычислить указанные в условии неизвестные элементы. Известные элементы при этом могут задаваться и в буквенном виде. В такой постановке вопроса доказательство существования фигуры, о которой идет речь в условии задачи, отпадает.

2°. Требуется не только получить формулы для искомых элементов, но и провести исследование, заключающееся в установлении необходимых и достаточных условий существования фигуры, а уже затем произвести вычисления.

Поясним эту мысль следующим примером. В треугольнике ABC даны длины сторон $BC = a$, $CA = b$ и дан угол A. Вычислить угол B.

Р е ш е н и е. По теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

откуда

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

и значит,

$$B = \arcsin \frac{b \sin A}{a}$$

или

$$B = \pi - \arcsin \frac{b \sin A}{a}.$$

Такое «решение» предполагает, что существуют два треугольника, удовлетворяющие условию задачи. Проведем перед вычислениями исследование о существовании треугольника.

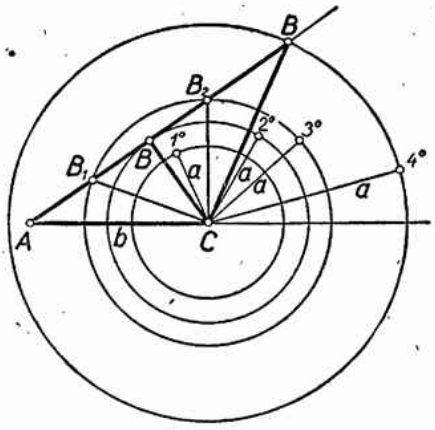


Рис. 1

1). Построим угол, равный данному углу A, считая, что $0 < A < \frac{\pi}{2}$ (рис. 1), и отложим на любой его стороне отрезок AC, длина которого равна b.

1°. Если $a < b \sin A$ — задача не имеет решений.

2°. Если $a = b \sin A$, то существует только один треугольник, удовлетворяющий условиям задачи; при этом $B = \frac{\pi}{2}$.

3°. Если $b \sin A < a < b$, то задача имеет два решения; при этом для одного треугольника $B = \arcsin \frac{b \sin A}{a}$, а для другого $B = \pi - \arcsin \frac{b \sin A}{a}$.

4°. Если $a \geqslant b$, то задача имеет одно решение; при этом $B = \arcsin \frac{b \sin A}{a}$.

2). Пусть $A = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2). Тогда задача имеет одно решение и притом только тогда, когда $a > b$; при этом $B = \arcsin \frac{b}{a}$.

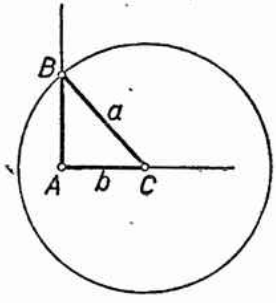


Рис. 2

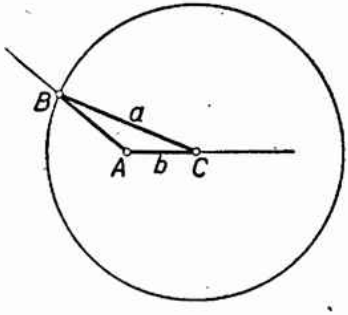


Рис. 3

3). Пусть $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ (рис. 3). Тогда задача имеет только одно решение $B = \arcsin \frac{b \sin A}{a}$ и притом только тогда, когда $a > b$.

Решение задачи во второй постановке, как видно из приведенного примера, может представить значительные трудности.

При формулировке задач для поступающих, естественно, должно быть каждый раз четко оговорено, в какой постановке вопроса дается геометрическая задача. Так, например, в геометрических задачах, данных на физическом факультете в 1966 г. (вариант 1, задача № 4, и вариант 2, задача № 4), в условии ясно сказано, что требуется не только произвести вычисления, но и выполнить исследование вопроса о существовании фигуры с заданными параметрами. Задачу же № 4 варианта 3 (стр. 42) поступающий вправе толковать в первой постановке вопроса. Поэтому вопрос о существовании решения можно было на экзамене и не излагать. Произвольное расширение толкования условия задачи может привести поступающих в высшие учебные заведения к непосильным трудностям. Поэтому если в задаче нет специальной оговорки, то каждый абитуриент вправе толковать ее как задачу, данную в первой постановке. Однако мною дано и для этой задачи (и для ряда других) расширенное толкование условия задачи, так как в данной работе я не касаюсь критериев оценок.

ГЛАВА I

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ, 1966 ГОД

§ 1. Механико-математический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт A. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт B. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта A до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы доплыть от пункта B до устья притока и обратно, как 32 : 35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/ч* больше, то это отношение было бы равно 15 : 16, а если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/ч* меньше, то отношение было бы равно 7 : 8. Найти скорость течения реки. Расстояния измеряются вдоль притока и реки соответственно.

2. Решить неравенство:

$$5 + 2\cos 2x \leqslant 3|\,2\sin x - 1|.$$

3. Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

4. Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 $м^2$. При каких значениях сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей?

5. Найти все значения a и b, при которых система

$$\left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \quad x^2 + y^2 = b$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа, $x > 0$).

Вариант 2

1. Из порта одним и тем же курсом вышли в разное время два корабля, идущие с одной и той же скоростью. Со второго корабля,

идущего сзади, отправляется быстроходный катер, который догоняет первый корабль и сразу же возвращается на свой корабль. Катер находится в пути 13 *ч* 20 *мин*. Если бы перед выходом катера оба корабля одновременно уменьшили скорость на 10 *км/ч*, то катер находился бы в пути 11 *ч* 40 *мин*, а если бы они одновременно увеличили скорость на 10 *км/ч*, то катер находился бы в пути 17 *ч* 30 *мин*. На сколько раньше вышел из порта первый корабль, чем второй?

2. Решить неравенство:

$$(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x}(3 \operatorname{tg}^2 x).$$

3. Высота треугольной пирамиды равна h, сумма девяти плоских углов при всех вершинах основания равна α. Известно, что существует шар, касающийся всех боковых граней в точках пересечения их медиан. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы, имеющей основанием прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 50 *см*. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь 0,96 *кв. м*. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей?

5. Найти все значения a, при которых система

$$x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2,$$
$$x^3 + ax^2y + xy^2 = 1$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$ (a, x, y — действительные числа).

Вариант 3

1. Туристы выехали на лодке из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки. Первую половину пути они шли на веслах, а потом включили мотор и прибыли в пункт B через 4 *ч* после выхода из A. Если бы весь путь из A в B они шли на веслах, то он занял бы у них 5 *ч* 20 *мин*. На обратном пути из B в A они четверть пути шли на веслах, а затем включили мотор и прибыли в пункт A через 7 *ч* после выхода из B. Сколько времени занял бы у них обратный путь, если бы весь этот путь они шли на веслах?

2. Решить неравенство:

$$\left| 3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1-\operatorname{tg} \pi x} \right| \geqslant 2.$$

3. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна s, а периметр основания равен $3a$. Шар касается всех трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 *кв. см*. Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна 20 *см*. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

5. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{aligned} xyz + z &= a, \\ xyz^2 + z &= b, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z — действительные числа).

Вариант 4

1. Из пункта A в пункт B выезжает автомобиль, и одновременно из B в A с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из B в A выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном $^2/_9$ пути от A до B. Если бы скорость автомобиля была на 20 *км/ч* меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 *км* и первая встреча произошла бы через три часа после выезда автомобиля из пункта A. Найти длину пути между A и B. Скорости мотоциклов одинаковы.

2. Решить неравенство:

$$(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x} (4 \sin^3 x).$$

3. Шар радиуса r касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна α. Доказать, что пирамида правильная. Найти длину бокового ребра пирамиды.

4. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 *кв. м*, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

5. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y &= 2, \\ a + bxy + x^2y &= 1, \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

Вариант 5

1. Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения. Две байдарки, имеющие в стоячей воде одинаковую скорость, выходят одновремен-

но по течению: первая — в левую протоку, вторая — в правую. Первая байдарка прошла свою протоку на 5 *мин* быстрее, чем вторая. Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 *мин* быстрее, чем первая. Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 *мин* быстрее, чем первая. За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению?

2. Решить неравенство:

$$\operatorname{tg}^2 x \leqslant |1 - 2\operatorname{ctg}^2 x|.$$

3. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды равен α. Сумма длин боковых ребер равна $3b$. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть равна 2 *кв.дм*, а боковая поверхность — 18 *кв. дм*. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей?

5. Найти все значения a, при которых система

$$2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a,$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

Вариант 6

1. В море с прямолинейным участком берега впадают две реки с одинаковой скоростью течения. Посредине между их устьями расположен город A, на первой реке находится пункт B, а на второй реке — пункт C. Расстояние вдоль реки от B до устья этой реки равно расстоянию от A до устья реки, а расстояние от C до устья реки составляет $^3/_4$ расстояния от A до устья реки. Из города A одновременно выходят две лодки: первая идет в B (вдоль берега моря и по реке), а вторая идет в C (также вдоль берега моря и по реке). Дойдя до пунктов B и C, лодки сразу поворачивают назад и идут соответственно в пункты C и B. Известно, что общее время, в течение которого первая лодка на пути из A в B, а потом в C шла по морю, относится ко времени, в течение которого она шла по рекам, как 45 : 47. Для второй лодки это отношение равно 16 : 17. Какая из лодок первой пришла в свой конечный пункт — первая лодка в C или вторая лодка в B?

2. Решить неравенство:

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8.$$

3. Шар касается всех трех боковых граней треугольной пирамиды $SABC$ в точках пересечения их биссектрис. Из вершины S проведены биссектрисы SD и SE боковых граней SAC и SAB. Угол DSE равен α; объем пирамиды равен v. Доказать, что пирамида правильная. Найти периметр основания.

4. В квадратном листе фанеры со стороной, равной 10 единицам длины, вырезано отверстие в форме прямоугольника, диагональ которого равна 5 единицам длины. Это отверстие по краю окантовано тонкой проволочной рамкой. Единица площади фанеры весит 2 $г$, а единица длины проволоки весит 7 $г$. Какими должны быть стороны отверстия, чтобы вес получившегося листа был наибольшим? (Единица площади есть площадь квадрата со стороной, равной единице длины.)

5. Найти все значения a, при которых система

$$2^{bx} + (a+1)\, by^2 = a^2,$$
$$(a-1)\, x^3 + y^3 = 1$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

§ 2. Физический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство:

$$x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000.$$

2. Для каждого вещественного числа $a \geqslant 0$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$|z|^2 - 2iz + 2a(1+i) = 0.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2\operatorname{tg} x = 0.$$

4. В круговой сектор радиуса r с центральным углом α ($0 < \alpha < \pi$) вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на дуге сектора, а две другие — на радиусах, ограничивающих сектор. Площадь прямоугольника равна s. Найти стороны прямоугольника. При каком соотношении между r, α и s задача имеет единственное решение?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ и $A'B'C'D'$ — основания, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) даны длины ребер $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Пусть O — центр основания $ABCD$, O' — центр основания $A'B'C'D'$, а S — точка, делящая отрезок $O'O$ в отношении 1: 3, т. е. $O'S : SO = 1 : 3$. Найти площадь

сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали AC' параллелепипеда и диагонали BD его основания $ABCD$.

Вариант 2

1. Для каждого вещественного числа a решить уравнение:

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0.$$

2. Для каждого вещественного числа $a \geqslant 1$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$z + a\,|\,z + 1| + i = 0.$$

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

4. В треугольнике ABC дана разность φ внутренних углов A и B ($\varphi = A - B$). Известно, что высота, опущенная из вершины C на сторону AB, равна разности $BC - AC$ сторон BC и AC. Найти углы треугольника и найти все значения φ, при которых задача имеет решение.

5. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух несмежных и непараллельных сторон основания и через середину высоты пирамиды.

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$(\log_x 2)\,(\log_{2x} 2)\,(\log_2 4x) > 1.$$

2. Для каждого вещественного числа a решить уравнение:

$$(\lg \sin x)^2 - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$$

3. Сумма трех положительных чисел α, β и γ равна $\frac{\pi}{2}$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию.

4. Внутри угла AOB взята точка M; $\angle MOA = \alpha$, $\angle MOB = \beta$, $OM = a$ ($\alpha + \beta < \pi$). Найти радиус окружности, проходящей через точку M и отсекающей на сторонах OA и OB данного угла хорды длины $2a$.

5. Площадь сечения, проведенного через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно непересекающемуся с этой диагональю боковому ребру, равна s. Найти площадь сечения, проходящего через середину двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды.

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

2. Для каждого вещественного числа a решить уравнение:

$$9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3,$$
$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6,$$
$$x + y + z = \pi.$$

4. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

5. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна s. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

Вариант 5

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0.$$

2. Для каждого вещественного числа $a \geqslant 0$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$z|z| + az + i = 0.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = 0,$$
$$\cos(x - y - z) = \frac{1}{2},$$
$$x+y+z = \pi.$$

4. Даны две концентрические окружности радиусов r и R ($R > r$). Найти сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса r, а две другие — на окружности радиуса R. При каком соотношении между r и R 1) решение возможно; 2) имеется только одно решение?

5. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна плоскости

основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной b ($b \neq a$). Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

Вариант 6

1. Решить неравенство:

$$2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x.$$

2. Для каждого вещественного числа $a \geqslant 0$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$2|z| - 4az + 1 + ia = 0.$$

3. Решить систему уравнений:

$$|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3,$$
$$xy = 3.$$

4. Дан угол AOB, равный α ($\alpha < \pi$). На стороне OA взята точка C, а на стороне OB — точка D, причем $OC = a \neq 0$, $OD = b \neq 0$. Построена окружность, касающаяся стороны OA в точке C и проходящая через точку D. Пусть эта окружность вторично пересекает сторону OB в точке E. Вычислить радиус построенной окружности и длину хорды DE.

5. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны a и $3a$. Расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в различных боковых гранях, равно b. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные ребра.

§ 3. Химический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. В озеро впадают две реки. Пароход выходит из порта M на первой реке, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро (где нет течения) и по второй реке вверх (против течения) до порта N. Затем пароход возвращается обратно.

Скорость парохода при отсутствии течения равна v, скорость течения первой реки v_1, второй реки v_2, время движения парохода от M до N равно t, а длина пути от M до N равна s. Время обратного движения от N до M по тому же пути также равно t. Какое расстояние пароход идет по озеру в одном направлении?

2. Решить уравнение:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2.$$

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоскость, проходящая через сторону AC основания и перпендикулярная ребру SB, отсекает пирамиду $DABC$, объем которой в полтора раза меньше объема пирамиды $SABC$. Найти боковую поверхность пирамиды $SABC$, если $AC = a$.

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-2x-x^2}{14} > 1.$$

Вариант 2

1. Товарный поезд, шедший из A в B, прибыл на станцию C одновременно с пассажирским, шедшим из B в A со скоростью, в m раз большей, чем товарный. Оба поезда, простояв на станции C t часов, затем продолжили свой путь, причем каждый из них увеличил скорость на 25% по сравнению со своей первоначальной скоростью (скоростью до прибытия в C). При этом товарный прибыл в B на t_1 часов позже, а пассажирский прибыл в A на t_2 часов позже, чем если бы они двигались без остановки со своими первоначальными скоростями. Насколько раньше товарный поезд вышел из A, чем пассажирский из B?

2. Решить уравнение:

$$\sin 2x - \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

3. В прямой круговой конус вписано два шара так, что: 1) шары касаются друг друга и каждый из них касается боковой поверхности конуса, 2) центры шаров лежат на оси конуса и нижний (бо́льший) шар касается основания конуса. Найти объем конуса, если радиус верхнего шара равен a, нижнего b.

4. Решить неравенство:

$$\log_x (16 - 6x - x^2) > 1.$$

Вариант 3

1. От A до B s километров. Из A в B вылетел вертолет, а через t часов — самолет. Он догнал вертолет в d километрах от A, долетел до B, сразу же повернул обратно, в d километрах от B встретил вертолет и вернулся в A позднее, чем вертолет прибыл в B. На сколько раньше вертолет прибыл в B, чем самолет вернулся в A?

2. Решить уравнение:

$$\sin 3x + \sin x + 2\cos x = \sin 2x + 2\cos^2 x.$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ плоскость, проведенная через сторону AD основания перпендикулярно к грани BSC, делит эту грань на две части, одинаковые по площади. Найти полную поверхность пирамиды, если $AD = a$.

4. Решить неравенство:

$$\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0.$$

Вариант 4

1. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист выехал на t_1 часов позже, чем велосипедист, но едет в m раз быстрее его. Доехав до B, мотоциклист сразу же повернул обратно и прибыл в A на t_2 часов раньше велосипедиста.

Через сколько времени после своего выезда велосипедист встретил мотоциклиста?

2. Решить уравнение:

$$\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x.$$

3. Высота конуса в 4 раза больше радиуса шара, вписанного в этот конус. Образующая конуса равна l. Найти боковую поверхность конуса и радиус шара, описанного около конуса.

4. Решить неравенство:

$$\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>4.$$

§ 4. Геологический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Автомобиль выехал из города A в город B. Проехав часть пути с постоянной скоростью, он увеличил ее на 20 *км/ч* и прибыл в B, затратив на весь путь на полтора часа меньше времени, чем то, которое потребовалось бы ему, если бы он проехал от A до B с первоначальной скоростью. При этом первую и вторую часть пути он проехал за одно и то же время. Если бы указанное увеличение скорости он произвел, пройдя точно половину пути от A до B, то выигрыш во времени составил бы лишь 1 *ч* 15 *мин*. Найти расстояние AB.

2. Найти все решения уравнения:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=3\log_{\frac{\sqrt{5}}{25}}5+4.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x.$$

4. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 *см* от центра окружности радиуса 3 *см*, проведены две секущие AKC и ALB, угол меж-

ду которыми равен 30° (K, C, L и B—точки пересечения секущих с окружностью). Найти площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10 $см^2$.

Вариант 2

1. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторой работы требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет ее на один час быстрее первого. Работая все вместе, они выполнят работу за один час. Если же первый рабочий проработает один час, а затем второй рабочий проработает четыре часа, то вместе они выполнят всю работу. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

2. Найти все решения уравнения:

$$x^{(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x} = 3^{-3\log_{\sqrt{2}-1}\sqrt{2}+8}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$\sin x + \cos 4x = \cos 2x - \sin 5x.$$

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 1, на медиане BK взята точка M так, что $MK = {}^1/_4\, BK$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке L. Найти площадь треугольника ALC.

Вариант 3

1. Проценты содержания спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

2. Найти все решения уравнения:

$$2\log_4(2^x - 1) + x + \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\sqrt{6}-\sqrt{6}} 6 = 0.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7.$$

4. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12 $см$, взяты точки A и B так, что $OA = 15$ $см$ и $AB = 5$ $см$. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OAB. Найти площадь треугольника ABC, если C — точка пересечения этих касательных.

Вариант 4

1. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 3360 *км*, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них едет с постоянной скоростью, и они встречаются в некоторый момент времени. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше, а если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на четыре часа позже этого момента. Найти скорость каждого из поездов.

2. Найти все решения уравнения:

$$\frac{1}{2}\log_2(2^{\sqrt[3]{6x}} - 10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}} + 1) = 3(\log_{7\sqrt{7}} 49 - 1).$$

3. Найти все решения уравнения:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1.$$

4. На продолжениях медиан AK, BL и CM треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$ и $MR = \frac{1}{2}CM$. Найти площадь треугольника PQR, если площадь треугольника ABC равна единице.

§ 5. Географический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Два экскаватора начали работать одновременно, и до перерыва второй выкопал восемь траншей. После перерыва они работали еще два часа, и за это время второй вырыл на две траншеи больше того, что выкапывал первый за час работы, а первый на двенадцать траншей меньше того, что оба вместе вырыли до перерыва. Все траншеи одинаковы. Сколько всего траншей вырыли экскаваторы?

2. Решить неравенство и изобразить результаты на числовой оси:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} > \sin\frac{11\pi}{6}.$$

3. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

4. Найти все решения уравнения:

$$\sin 6x + \cos 6x = 1 - 2\sin 3x.$$

Вариант 2

1. Две автомашины, выехавшие одновременно из городов A и B навстречу друг другу, каждая со своей скоростью, встретились

через шесть часов. Первой машине, чтобы пройти $^2/_5$ пути от A до B, требуется на два часа больше, чем второй, для того, чтобы пройти $^2/_{15}$ пути от B до A. За сколько часов проходит расстояние между A и B каждая машина?

2. Решить неравенство и изобразить результат на числовой оси:

$$\log_2(3-x) - \log_2 \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2} + \log_2(x+7).$$

3. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найти длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

4. Найти все решения уравнения:

$$2\sin^4 2x - \sin^2 2x \sin 4x = 2\sin^2 2x - \sin 4x.$$

Вариант 3

1. Двое рабочих получили одинаковые задания: изготовить определенное число деталей за определенный срок. Первый выполнил задание в срок, а второй выполнил в срок только 90% задания, не додав столько деталей, сколько первый делал за 40 *мин*. Если бы второй рабочий делал в час на три детали больше, он выполнил бы задание на 95%. Сколько деталей должен был изготовить каждый рабочий?

2. Решить неравенство и изобразить результат на числовой оси:

$$\log_4(2 - \sqrt{x+3}) < 2\cos\frac{5\pi}{3}.$$

3. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.

4. Найти все решения уравнения:

$$6\sin^2 3x + \cos 12x = 4.$$

Вариант 4

1. Велосипедист проехал 96 *км* на 2 *ч* быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 *км* больше, чем предполагал проезжать за 1 *ч* 15 *мин*. С какой скоростью он ехал?

2. Решить неравенство и изобразить результат на числовой оси:

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+5) < \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}.$$

3. Угол при основании равнобедренного треугольника ABC равен α ($\alpha > 45°$), а площадь равна s. Найти площадь треуголь-

ника, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC.

4. Найти все решения уравнения:

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 4x.$$

§ 6. Биолого-почвенный факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Из A в B одновременно выехали по одному и тому же шоссе три автомобиля. Второй имел скорость на 30 *км/ч* больше первого и прибыл в B на 3 *ч* раньше его. Третий прибыл в B на 2 *ч* раньше первого, причем половину времени он двигался со скоростью первого, а другую половину — со скоростью второго. Найти расстояние AB.

2. Найти все решения уравнения:

$$2^{1+2\cos 5x} + 16^{\sin^2 \frac{5x}{2}} = 9.$$

3. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB = a$, AH — высота, BE — биссектриса (точка H лежит на стороне BC, точка E — на AC). Точки H и E соединены отрезком. Найти площадь треугольника CHE.

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x-1}{x+1} < \cos \frac{2\pi}{3}.$$

Вариант 2

1. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое число деталей. Первый начал работу сразу и выполнил ее за 8 *ч*. Второй же потратил сначала больше двух часов на наладку приспособления, а затем с его помощью закончил работу на 3 *ч* раньше первого. Известно, что второй рабочий через час после начала своей работы обработал столько же деталей, сколько к этому моменту обработал первый. Во сколько раз приспособление увеличивает производительность станка (т. е. количество обрабатываемых деталей за час работы)?

2. Найти все решения уравнения:

$$81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0.$$

3. Основание равнобедренного треугольника равно b, а угол при основании равен α. Прямая пересекает продолжение основания в точке M под углом β и делит пополам ближайшую к M боковую

сторону треугольника. Найти площадь четырехугольника, отсекаемого прямой от данного треугольника.

4. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2-4x+3}{4} < 2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}.$$

Вариант 3

1. Из A в B выехали в разное время по одному и тому же шоссе грузовик и автобус. Скорость автобуса на 12 *км/ч* больше, чем грузовика. Они прибыли в B одновременно. За $2^1/_2$ *ч* до их прибытия навстречу им из B выехал мотоцикл, который встретил грузовик на 10 *мин* раньше, чем автобус. Скорость мотоцикла вдвое больше скорости грузовика. Найти скорость грузовика.

2. Найти все решения уравнения:

$$3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1-\sin 2x + 2\sin^2 x} = 28.$$

3. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении 2 : 1 и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{5x+4}{x-2} > \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}.$$

Вариант 4

1. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и вторая бригады вместе вспахали бы это поле за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз вторая бригада вспахивает за день больше, чем третья?

2. Найти все решения уравнения:

$$125^{1-\sin^2 3x} \cdot 5^{\sin 6x} - 5^{\sin^2 3x} = 0.$$

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 2α. Прямая, пересекающая высоту на расстоянии c от вершины, образует с продолжением основания угол β. Найти площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от данного треугольника.

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}} [(x+3)(x-5)] > 4\sin\frac{7\pi}{6}.$$

Вариант 5

1. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 *г* соли и 90 *г* воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 *г* воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 *г* каждого раствора?

2. Найти все решения уравнения:

$$2 \sin 4x - 3 \sin^2 2x = 1.$$

3. В равнобедренный треугольник вписаны две окружности. Первая имеет радиус R и касается всех трех сторон треугольника, а вторая имеет радиус r и касается боковых сторон и первой окружности. Найти стороны треугольника.

4. Найти все решения уравнения:

$$2 \log_8 (2x) + \log_8 (x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}.$$

§ 7. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1966 г.

Вариант 1

1. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

2. Решить уравнение:

$$\lg \sin 2x - \lg \sin x = \lg \cos 2x - \lg \cos x + 2\lg 2.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{|x|} (\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geqslant 1.$$

4. Доказать, что проекция правильного тетраэдра на плоскость будет иметь наибольшую площадь, когда эта плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

5. Решить в комплексных числах систему уравнений:

$$z^3 + \overline{w}^7 = 0, \quad z^5 w^{11} = 1$$

($\overline{w}$ — комплексное число, сопряженное с комплексным числом w,

т. е. если $w = p + qi$, где p и q — действительные числа, то $\overline{w} = p - qi$).

Вариант 2

1. В буфете продавались пирожки за 5 коп., бублики за 6 коп., булки за 7 коп., слойки за 8 коп. и коржики за 10 коп. Группа ребят купила на 1 руб. 14 изделий разных сортов. Сумма цен купленных изделий равна 21 коп. Сколько каких изделий куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше 7 и никаких не было куплено поровну?

2. Решить уравнение:

$$\lg \sin \frac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x).$$

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{25 - x^2} \geqslant x.$$

4. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит правильный треугольник со стороной 1. Доказать, что сумма квадратов длин проекций сторон этого треугольника на плоскость Q не зависит от его расположения в плоскости P.

5. Решить в комплексных числах систему уравнений:

$$z^5 w^7 = 1, \quad z^2 - \overline{w}^3 = 0.$$

Вариант 3

1. У школьника есть 1 руб. монетами достоинством до 10 коп. включительно. Известно, что если отобрать по одной монете каждого типа, имеющегося у школьника, то в сумме получится 15 коп. Сколько монет каждого достоинства имеется, если монет самого большого достоинства больше числа всех прочих монет на 4?

2. Решить уравнение:

$$\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2 (1 - \operatorname{tg} x) - \log_2 (1 + \operatorname{tg} x) = 1.$$

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{x - 5} - \sqrt{9 - x} \geqslant 1.$$

4. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит квадрат со стороной 1. Доказать, что периметр проекции этого квадрата на плоскость Q наибольший, когда диагональ квадрата параллельна плоскости Q.

5. Решить в комплексных числах систему уравнений:

$$z^3 + w^5 = 0, \quad z^2 \overline{w}^4 = 1.$$

Вариант 4

1. У продавца мороженого есть по нескольку десятков порций мороженого пяти сортов — за 7, 9, 11, 13 и 15 коп. Общее число порций равно 180, а общая стоимость — 18 р. 40 к. Мороженого по 7 и 9 коп. вместе столько же, сколько по 11, 13 и 15 коп. вместе. Кроме того, известно, что порций по 9 коп. вдвое больше, чем по 15 коп., и больше, чем по 13 коп. Определить число порций каждого сорта.

2. Решить уравнение:

$$\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = 1.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_a (\sqrt{25 - x^2} - 1) \geqslant \log_a (|x| + 1).$$

4. Доказать, что сумма квадратов длин проекций ребер единичного куба на плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна 8.

5. Решить в комплексных числах систему уравнений:

$$\begin{gathered} z^{13} w^{19} = 1, \\ z^5 w^7 = 1, \\ z^2 + w^2 = -2. \end{gathered}$$

§ 8. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1966 г.

Вариант 1

1. Коров кормили двумя видами кормов. В 1 *ц* первого вида содержится 15 *кг* белка и 80 *кг* углеводов. В 1 *ц* второго вида содержится 5 *кг* белка и 30 *кг* углеводов. Всего коровы получили 58 *ц* углеводов и 10,5 *ц* белка. Найти общий вес корма, данного коровам.

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{2}{5}} (x - 1) - \log_{\frac{2}{5}} (x - 10) = 1.$$

3. Из точки A, расположенной вне окружности с центром O, проведены к окружности две касательные. Длина дуги B_1B_2 между точками касания B_1 и B_2 равна a, $\angle B_1AB_2 = \alpha$. Найти AO.

4. Решить уравнение:

$$|x^2 + 2x - 1| = \frac{5}{3} x + \frac{11}{3}.$$

5. Решить уравнение:

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \right|^{\sqrt{8x - x^2 - 6}} = 1.$$

Вариант 2

1. В процессе изготовления винты и гайки проходят последовательную обработку на двух станках. Винт обрабатывается на первом станке 4 *сек*, на втором — 3 *сек*, а гайка на первом станке — 6 *сек*, на втором — 2 *сек*. Станки работали непрерывно: первый — 8,5 *ч*, второй — 4,5 *ч*. На сколько больше было изготовлено винтов, чем гаек?

2. Решить уравнение:

$$\log_3 \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\log_3 (x^2 - x + 1) = 1.$$

3. Из точки A, расположенной вне круга с центром в точке O, проведены две секущие. Одна пересекает окружность в точках B и C (B лежит между A и C), другая проходит через центр круга и пересекает окружность в точках M и N (M лежит между N и A); $CA = a$, $\angle CAO = \alpha$, $\angle CON = \beta$. Найти CB.

4. Решить уравнение:

$$|x^2 - 2x - 1| = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}.$$

5. Решить уравнение:

$$\left| 10 \sin \frac{x}{2} - 6 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right|^{\sqrt{11x - x^2 - 10}} = 1.$$

Вариант 3

1. В столовой имеется 36,6 *кг* мяса и 58,7 *кг* картошки. На 1 порцию супа уходит 25 *г* мяса и 50 *г* картошки, а на 1 порцию второго уходит 100 *г* мяса и 150 *г* картошки. На сколько больше получится порций супа, если израсходовать все имеющиеся продукты?

2. Решить уравнение:

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2}\log_6 (x - 1.1) = 1.$$

3. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если

$$AB = BC = a,\ AD = DC = b,\ \angle ADC = \alpha.$$

4. Решить уравнение:

$$|x^2 - 4x + 2| = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}.$$

5. Решить уравнение:

$$\left| \cos \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{4 \cos \frac{x}{2}} \right|^{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} = 1.$$

Вариант 4

1. У продавца в лотке мороженое двух видов: по 20 коп. (порция весом 200 *г*) и по 13 коп. (порция весом 100 *г*); стоимость находящегося в лотке мороженого равна 28 р. 99 к., а общий вес 28,3 *кг*. Сколько в лотке порций мороженого?

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{2}\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1.$$

3. К прямоугольнику $ABCD$ приложен $\triangle AO'B$, равный $\triangle AOB$, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найти $O'C$, если $AD=a$, $\angle BDC=\alpha$.

4. Решить уравнение:

$$|x^2-6x+7|=\frac{5}{3}x-3.$$

5. Решить уравнение:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\frac{3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{x^2-12x+6}}=1.$$

§ 9. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1966 г.

Вариант 1

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, которые встретились в 12 *км* от пункта B. Продолжая свое движение и доехав до пунктов B и A, они сразу же повернули обратно и снова встретились в 6 *км* от пункта A. Определить скорости велосипедистов и расстояние AB, если известно, что второй велосипедист вернулся в пункт B через 1 *ч* после того, как первый велосипедист вернулся в пункт A.

2. Решить систему уравнений:

$$2x^y-x^{-y}=1,$$

$$\log_2 y=\sqrt{x}.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin^2 x-\frac{5}{12}}<-1.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) В куб со стороной a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

4б) Рассматриваются всевозможные пятибуквенные последовательности, не содержащие других букв, кроме А, Б, В (например, БААББ, ВВВВВ, ВБАБА и т. д.). Сколько среди этих последовательностей таких, в которых буква А встречается не более двух раз, буква Б — не более одного раза, а буква В — не более трех раз?

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B выехали одновременно «Москвич» и «Запорожец», скорости которых соответственно 80 *км/ч* и 60 *км/ч*. Спустя 1 *ч* из A в B выехала «Волга», которая прибыла в B через 1 *ч* после того, как обогнала «Москвича». Определить скорость «Волги» и расстояние от A до B, если известно, что «Запорожец» прибыл в B через 2 *ч* после прибытия туда «Волги».

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{y} &= 3^{x-1} + 3, \\ y^2 + 2 \cdot 3^{x-1} y &- 3^{2x-1} = 0. \end{aligned}$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{\operatorname{ctg} x} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < 1.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Два конуса имеют высоты h_1 и h_2 и общее основание радиуса R, а их вершины лежат по разные стороны от плоскости основания. В поверхность, составленную из боковых поверхностей этих конусов, вписан шар. Найти радиус другого шара, который касается как боковой поверхности первого конуса (причем по целой окружности), так и первого шара.

4б) Про любые две несовпадающие последовательности русских букв можно сказать, которая из них следует за другой по алфавиту (так, последовательность «щщ», имеющая длину 2, следует за последовательностью «кякк», имеющей длину 4, последовательность «цю» следует за последовательностью «цхк», а последовательность «крра» следует за последовательностью «кр»*. Сколько существует всевозможных последовательностей, следующих за последовательностью «экзамен» и имеющих длину не большую, чем 3?

Вариант 3

1. Из пункта A в пункт B выезжают одновременно мотоцикл и «Победа», а из B в A в тот же момент выезжает «Москвич», который

---

* Здесь поясняется принцип лексикографического расположения сочетаний букв. По этому принципу располагаются слова в словарях, предметных указателях, энциклопедиях и т. д.

через 5 *ч* 50 *мин* прибывает в пункт A. Автомобили встретились через 2 *ч* 30 *мин* после выезда, а мотоцикл и «Москвич» встретились на расстоянии 140 *км* от пункта A. Если бы скорость мотоцикла была в два раза большей, то он встретился бы с «Москвичом» в 200 *км* от A. Найти скорости мотоцикла, «Москвича» и «Победы».

2. Решить систему уравнений:

$$|x|^{|y|} = |y|^{|x|},$$
$$|x|^{\left|\frac{2}{x}\right|} + 2|y|^{\left|\frac{1}{y}\right|} = 3.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+2\cos 2x} < 1.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) В двугранный угол, ребро которого совпадает с высотой прямого кругового конуса, вписан шар, касающийся изнутри боковой поверхности и основания конуса. Найти радиус этого шара, если двугранный угол равен φ, образующая конуса равна c, а угол между образующей и высотой равен ψ.

4б) Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в записи которых нет других цифр, кроме 1, 2 и 3. Сколько среди них чисел с суммой цифр не менее 12?

Вариант 4

1. Поезд должен был пройти расстояние от A до B за определенное время. После трехчасового пути он был задержан на промежуточной станции на один час и, чтобы прибыть к сроку, оставшуюся часть пути шел со скоростью, на 4 *км/ч* большей, чем первоначальная. Если бы с такой скоростью он шел весь путь AB, то он прибыл бы в B на 1 *ч* 12 *мин* раньше. Найти расстояние AB.

2. Решить систему уравнений:

$$x^2 = 1 + 6\log_4 y,$$
$$y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1}.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{2\sin x} \sqrt{1+2\cos 2x} < \frac{1}{2}.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) В усеченный конус, у которого радиусы нижнего и верхнего оснований равны R и r, вписан шар. Найти радиус второго шара, который касается первого шара, боковой поверхности усеченного конуса и верхнего основания.

4б) Среди всевозможных последовательностей, составленных из русских букв, установлен алфавитный порядок. Тем самым для

любых двух несовпадающих последовательностей известно, которая из них предшествует другой (например, последовательность «ккгвк», имеющая длину 5, предшествует последовательности «оау», имеющей длину 3; последовательность «иищ» предшествует последовательности «ию», последовательность «пдб» предшествует последовательности «пдбаб»). Сколько существует последовательностей, имеющих длину не более 4 и предшествующих последовательности «бой»?

§ 10. Факультет психологии, 1966 г.

Вариант 1

1. Два мальчика измеряют шагами садовую дорожку, начав двигаться с противоположных ее концов. После того как каждый из них сделал по 10 шагов, расстояние между мальчиками стало равно 22 *м*. Найти длину садовой дорожки, если известно, что шаг одного мальчика на 20 *см* короче шага другого и, чтобы пройти всю дорожку, ему надо сделать на 10 шагов больше, чем товарищу.

2. Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью a^2. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной, если боковая поверхность всей пирамиды равна b^2.

3. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

4. Где расположены комплексные числа $z = a + bi$, для которых

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1.$$

5. Построить график функции:

$$y = 1 - 2^{1+\sin(x+1)}.$$

Вариант 2

1. Тело, взвешенное на неравноплечных рычаговых весах, уравновешивается при взвешивании на одной чашке грузом a, при взвешивании на другой — грузом b. Каков истинный вес тела?

2. Прямая призма имеет основанием равносторонний треугольник. Плоскость, проведенная через одну из его сторон под углом α к основанию, отсекает от призмы треугольную пирамиду с объемом v. Определить площадь сечения.

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}.$$

4. Где расположены комплексные числа $z = a + bi$, для которых

$$\log_a |z| + \log_a (|z| + 1) < \log_a (2|z| + 5)?$$
$$(0 < a < 1).$$

5. Построить график функции:

$$y = \frac{|x-2|+1}{|x+3|}.$$

Вариант 3

1. Из половины металлического шара радиуса r вырезан наибольший из вписанных в это полушарие конусов. Хватит ли вынутого металла для изготовления полого шара радиуса r, с толщиной стенок $\frac{r}{10}$?

2. Решить уравнение:

$$\cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{6}.$$

3. Где расположены комплексные числа $z = a + bi$, для которых

$$\log_{\frac{1}{2}} |z-2| > \log_{\frac{1}{2}} |z|?$$

4. Построить график функции:

$$y = 3 + 2^{3\cos\frac{x}{3}}.$$

Вариант 4

1. Часть квадрата $ABCD$, оставшаяся после того как из него вырезали четверть окружности с центром в вершине D и радиусами, равными стороне квадрата, вращается вокруг оси, проходящей через D параллельно диагонали AC. Найти объем полученного тела вращения, если сторона квадрата равна a.

2. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}.$$

3. Где расположены комплексные числа $z = a + bi$, для которых

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2?$$

4. Построить график функции:

$$y = \frac{|x-3| + |x+1|}{|x+3| + |x-1|}.$$

ГЛАВА II

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ, 1967 ГОД

§ 11. Механико-математический факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$2\,|\lg(ax)|\log_x 10 = (4\lg a - 3)\log_{x^2}10 - \frac{1}{2}\lg x$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2*. Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 *л*. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной ее поверхности. При этом колба объемом в 1 *л* обходится в 1 р. 25 к., и в этом случае стоимость труда составляет 20% стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежимо малой). Сколько надо изготовить колб, чтобы их изготовление было наиболее рентабельным?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых x, y таковы, что выражение

$$\cos 2(t + x) + 2\sin(t + x)\cos y - \frac{1}{2}(\cos y - 1)^2 - \sin x$$

при всяком значении t меньше $^1/_2$, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Основание правильной треугольной пирамиды касается шара с центром в вершине пирамиды, причем внутри пирамиды содержится $\frac{1}{10}$ всей поверхности шара. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

---

* Условие этой задачи мною несколько изменено.

Вариант 2

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \left| \log_a \frac{x}{2} \right| = \log_{a^2} 2 \cdot \log_{\sqrt{x}} a^2 - \log_a \sqrt{x}$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути некоторое количество остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой последующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 50 пассажиров выходит из поезда. Возможен ли случай, когда в B прибывает менее 12 пассажиров, если из A их выезжает 462?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$\sin^2(t + x) + \sin(t + y) + \sin(t + 2x - y) + \frac{1}{4}$$

положительно при всяком значении t, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, а сторона основания равна 1. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара, центр которого расположен в вершине пирамиды, а радиус равен 1?

Вариант 3

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10 \left(\lg 10a - \left| \lg \frac{x}{a} \right| \right)$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 тыс. *кв. м*. Затраты на постройку одного дома, имеющего N *кв. м* жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 *кв. м* обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.

3. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$2\cos 2t + 4 \sin 2x \sin t + 2 \sin(x + y) - (\sin 2x - 1)^2$$

больше 1, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. В центре шара помещена вершина правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна радиусу шара, а объем относится к объему шара, как $3 : 16\pi$. В каком отношении делится объем пирамиды поверхностью шара?

Вариант 4

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a \,|\, a + \log_a x| = a \log_x a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Некоторое предприятие приносит убытки, составляющие 31 тыс. руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составят 25 тыс. руб. в год, а дополнительные расходы окажутся равными 5 тыс. руб. в год при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на 10 тыс. руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего.

Можно ли указанным способом сделать предприятие рентабельным?

3. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\cos(t + 3x + y) - \cos(t + x - y) - \sin^2(t + 2x)$$

больше $^1/_4$, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Прямоугольник $ABCD$ служит основанием пирамиды $SABCD$, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания и больше 1, а двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SBC, равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Найти часть объема пирамиды, содержащуюся в шаре радиуса 1 с центром в точке S.

Вариант 5

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a^2 \left| \log_{a^2} \frac{x}{2} \right| + \log_a x = \log_{a^2} 4 \cdot \log_{\sqrt{x}} a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Мастерская производит закрытые резервуары кубической формы. Время монтажа одного резервуара, пропорциональное квадрату его поверхности, в случае резервуара объемом 8 $л$, со-

ставляет 1 *мин* 40 *сек*, а на последующую обработку его поверхности расходуется еще по 1,5 *сек* на каждые 10 *кв. см* поверхности.

Может ли мастерская успеть за 20 *ч* изготовить такое количество одинаковых резервуаров, чтобы их общая вместимость составила 64 тыс. *л*?

3. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$(2\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y)\cos x \cos y + 1 + \cos x - \cos y + \cos 2t$$

положительно при всяком значении t, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Найти отношение полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды к поверхности шара, центр которого расположен в вершине пирамиды и который касается ее основания, зная, что вне пирамиды находится $^5/_7$ поверхности шара.

Вариант 6

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_a x \,|\log_x a - \log_2 a| = \\ = \log_x (ax) - \log_2 a^2 + \log_a x \log_2 a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

2. Автобус № 1, на котором студент может доехать до своего института без пересадок, идет от его дома до института 2 *ч* 1 *мин*. До института можно доехать также любым из автобусов № 2, № 3,..., № K, однако на автобус № P можно пересесть только с автобуса № $(P - 1)$. Маршруты этих автобусов таковы, что, доехав до института на одном из них, студент проведет в дороге (не считая пересадок) время, обратно пропорциональное числу использованных автобусов. Кроме того, на каждую пересадку ему придется потратить 4 *мин*. Верно ли, что существует путь, при котором на дорогу уходит в общей сложности менее 40,1 *мин*?

3. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\sin^2 t \cos^2 x + \cos^2 t \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \sin 2t + 2(\cos 2x + \cos y)$$

отрицательно, и изобразить область, образуемую этими точками.

4. Высота пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$, проходит через точку пересечения его диагоналей. Шар с центром в точке S касается основания пирамиды, причем внутри пирамиды находится $^1/_5$ его поверхности. Найти двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SBC.

§ 12. Физический факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство:

$$\log_{3x^2+1} 2 < \frac{1}{2}.$$

2. Для каждого вещественного числа a решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 2x + 2^{|a|}}{x^2 - a^2} > 0.$$

3. Решить уравнение:

$$6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

4. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найти острые углы треугольника.

5. Даны три одинаковых прямых круговых конуса с углом α $\left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$ в осевом сечении и радиусом основания, равным r. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$8^{\log_2 x} - 2x^2 > x - 2.$$

2. Для каждого вещественного числа $a > 0$ решить неравенство

$$x^{\sin x - a} > 1$$

при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3. Решить систему уравнений:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3,$$

$$|x - y| = \frac{\pi}{3}.$$

4. Треугольник ABC, угол B которого равен $2\alpha < \frac{\pi}{3}$, вписан в окружность радиуса R. Диаметр окружности делит угол B пополам. Касательная к окружности в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найти площадь треугольника ABM.

5. Три равных прямых круговых конуса с углом α в осевом сечении имеют общую вершину O и касаются друг друга внешним образом по образующим l_1, l_2, l_3. Найти угол между l_1 и l_2.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$x^{\lg \sin x} \geqslant 1$$

при услозии, что $x > 0$.

2. Для каждого вещественного числа $a > 0$ решить неравенство:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a.$$

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x.$$

4. В треугольнике ABC даны углы B, C и длина a стороны BC. Через середину O стороны AB и вершину A проведена окружность, касающаяся стороны BC. Вычислить радиус этой окружности.

5. В пирамиде $SABC$ (S — вершина, ABC — основание) дано: $AB = AC = a$, $BC = b$; высота пирамиды проходит через середину высоты AD основания; двугранный угол τ, образованный гранями SBC и ABC, равен $\frac{\pi}{4}$. Цилиндр, высота которого равна диаметру основания, вписан в эту пирамиду так, что одно его основание касается граней двугранного угла τ, другое — граней трехгранного угла A, а ось цилиндра параллельна AD. Найти радиус основания цилиндра.

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\log_2 (4^x + 5 \cdot 2^x + 2) > 2.$$

2. Для каждого вещественного числа a решить неравенство:

$$2 \mid x - a \mid < 2ax - x^2 - 2.$$

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x.$$

4. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

5. Прямой круговой конус имеет радиус основания r и угол α в осевом сечении. Два одинаковых шара радиуса R касаются друг друга, боковой поверхности конуса (извне) и плоскости основания конуса. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат центры шаров и центр основания конуса.

Вариант 5

1. Решить неравенство

$$x^{2 \sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x} \text{ при условии, что } x > 0.$$

2. Для каждого вещественного числа $a > 0$ решить неравенство

$$\sqrt{2ax - x^2} \geqslant a - x.$$

3. Решить уравнение:

$$2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 4x = 0.$$

4. Внутри острого угла α взята точка M, отстоящая от сторон угла на расстояниях a и $2a$. Найти радиус окружности, проходящей через точку M и касающейся сторон угла.

5. В шар с центром O вписан правильный тетраэдр $SABC$ с ребром a. Через вершину A под углом α к основанию ABC проведена плоскость, которая пересекает грань SBC по прямой, параллельной основанию. Определить площадь той части проведенной плоскости, которая лежит внутри шара, но вне тетраэдра.

Вариант 6

1. Решить неравенство:

$$4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2} + 1 \geqslant 0.$$

2. Для каждого вещественного числа a решить уравнение:

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = a.$$

3. Решить уравнение:

$$5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x).$$

4. Вокруг равнобедренного треугольника ABC описана окружность. Через вершину A проведена хорда длиной m, пересекающая основание BC в точке D. Дано отношение $BD : DC = k$ и угол A $\left(A < \frac{\pi}{2}\right)$. Найти радиус окружности.

5. Ребро куба равно a. Найти объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l куба.

§ 13. Химический факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B, находящийся в 100 *км* от пункта A, в одно и то же время отправились велосипедист и пешеход. Одновременно им навстречу из пункта B выехал автомобилист. Через час после выезда автомобилист встретил велосипедиста, а проехав еще $14^2/_{17}$ *км*, — пешехода, посадил его в машину, после чего они поехали вдогонку за велосипедистом и настигли его. Вычислить скорости велосипедиста и автомобилиста, если известно, что скорость пешехода равна 5 *км/ч*.

Время, необходимое на посадку пешехода и на разворот автомобиля, считается равным нулю.

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 0.$$

3. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD : BC = \alpha \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F.

Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD = DE$.

4. Решить неравенство:

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\left[\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4\cos^2 x) - 2\right] \geqslant 0.$$

Вариант 2

1. Пункт A находится по реке выше пункта B. В одно и то же время из пункта A отплыли вниз плот и первая моторная лодка, а из пункта B вверх — вторая моторная лодка. Через некоторое время лодки встретились в пункте C, а плот за это время проплыл третью часть AC.

Если бы первая лодка без остановки доплыла до пункта B, то плот за это время прибыл бы в пункт C. Если бы из пункта A в пункт B отплыла вторая лодка, а из пункта B в пункт A — первая лодка, то они встретились бы в 40 *км* от пункта A.

Какова скорость обеих лодок в стоячей воде, а также расстояние между пунктами A и B, если скорость течения равна 3 *км/час*?

2. Решить уравнение:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x).$$

3. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, лежащей между точками B и C, причем $BD : BC = \alpha (\alpha < 1)$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке E. Найти отношение площадей треугольников ABD и ECD.

4. Решить неравенство:

$$(\log_{\sqrt{x}} \sin x) \log_{2x}\left[\frac{1}{9}(2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1)\right] \leqslant 0.$$

Вариант 3

1. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 78 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста (соответственно P_A и P_B) и встретились через 3,9 *ч*.

Через сколько часов встретятся эти же велосипедисты, если они выедут из тех же пунктов одновременно навстречу друг другу и если скорость велосипедиста P_A увеличится вдвое, а скорость велосипедиста P_B уменьшится на 2 *км/ч*? Известно, что скорость велосипедиста P_A меньше 9 *км/ч*, а точка второй встречи велосипедистов отстоит от точки первой встречи на 16,8 *км* в сторону пункта B.

2. Решить уравнение:

$$\cos^4(\operatorname{arcctg} x) + \sin^4(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcctg} x).$$

3. На стороне AB треугольника ABC между точками A и B взята точка D так, что $AD : AB = \alpha$ ($\alpha < 1$); на стороне BC между точками B и C взята точка E так, что $BE : BC = \beta$ ($\beta < 1$). Через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей треугольников BDE и BEF.

4. Решить неравенство:

$$\sqrt{4\sin^2 x - 1}\,\log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1} \geqslant 0.$$

Вариант 4

1. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 105 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и, встретившись через 1 *ч* 45 *мин* после начала движения, без остановки продолжали путь — каждый в своем направлении.

Через три минуты после их встречи первый велосипедист, ехавший со скоростью 40 *км/ч*, повстречал третьего велосипедиста, ехавшего ему навстречу по той же дороге. Третий велосипедист после встречи с первым велосипедистом без остановки продолжал ехать в прежнем направлении и догнал второго велосипедиста в пункте C, в котором встретились бы первый и второй велосипедисты, если бы скорость первого была на 20 *км/ч* меньше, а второго на 2 *км/ч* больше первоначальной. С какой скоростью ехал третий велосипедист?

2. Решить уравнение:

$$\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] - \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right) = 1.$$

3. На продолжении стороны AB треугольника ABC отложен отрезок AD так, что $AD : AB = \alpha$.

На продолжении медианы BE отложен отрезок EF так, что $EF : BE = \beta$. Найти отношение площадей треугольников BDF и ABC.

4. Решить неравенство:

$$\sqrt{1 - \log_{\operatorname{tg} x} 2}\,[1 - 3\log_{\operatorname{tg} x} 2 + 2(\log_{\operatorname{tg} x} 2)^2] \geqslant 0.$$

§ 14. Геологический факультет (отделение геофизики), 1967 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство:

$$\log_4(2x^2+x+1)-\log_2(2x-1)\leqslant -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}.$$

2. Найти все решения уравнения:

$$2\cos^2 x+\log_{\sqrt{3}}(27^{\cos^2 x}-3^{\sin^2 x})=\frac{2}{\log_{12}3}+\log_9(3^{0.5+\cos 2x}-1)^4.$$

3. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза больше стороны основания?

4. Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам:

$$(x-a)(ax-2a-3)\geqslant 0,$$
$$ax\geqslant 4.$$

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log_3[(x+2)(x-3)]\leqslant 4\ \log_9(2x+1)-\log_{\sqrt{7}}7.$$

2. Найти все решения уравнения:

$$4^{\operatorname{tg}^2 x}-4^{\frac{1}{1+\cos 2x}}\cdot\log_{2\sqrt[3]{2}}4=-\log_{\sin x}\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

3. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 60°. Через точку A проведена плоскость, перпендикулярная биссектрисе угла S треугольника BSC. В каком отношении линия пересечения этой плоскости с плоскостью BSC делит площадь грани BSC?

4. Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам:

$$ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geqslant 0,$$
$$ax\geqslant a^2-2.$$

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$2\log_4 x-\frac{1}{2}\log_2(x^2-3x+2)\leqslant\cos\frac{4\pi}{3}.$$

2. Найти все решения уравнения:

$$2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x} - (2^{\frac{3}{2}}-1)4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\sin x(\sqrt{2}-1)}.$$

3. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани. Найти площадь получившегося сечения, если высота пирамиды равна h, а отношение боковой поверхности к площади основания равно $\sqrt{3}$.

4. Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам:

$$\frac{a^2x+2a}{ax-2+a^2} \geqslant 0,$$

$$ax + a > \frac{5}{4}.$$

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\log_4(2x^2+3x+1) \leqslant \log_2(2x+2).$$

2. Найти все решения уравнения:

$$4\cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} - 16{,}5\cdot 4^{\cos x+\sin x} = -\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}} 16.$$

3. В треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S

$$SA = SC,\ SB = 2AC,\ AB = BC = 1{,}5\ AC.$$

Через AC и середину D ребра SB проведена плоскость. Площадь полной поверхности пирамиды $SADC$ больше площади полной поверхности пирамиды $DABC$ на величину, равную площади основания $SABC$. Определить угол наклона грани ASC к плоскости основания пирамиды $SABC$.

4. Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, удовлетворяющего неравенствам:

$$\frac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)} \geqslant 0,$$

$$x - 8 \geqslant ax.$$

§ 15. Географический факультет (отделение почвоведения) и геологический факультет (общее отделение), 1967 г.

Вариант 1

1. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 *м* с интервалом в одну секунду. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в десяти метрах от линии старта, добежал до линии фи-

ниша и с той же скоростью побежал обратно. На каком расстоянии от линии финиша он встретил первого мальчика на своем обратном пути, если известно, что эта встреча произошла через 10 *сек* после старта первого мальчика?

2. Решить неравенство:

$$\log_4(2x^2+x+1)-\log_2(2x-1)\leqslant -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$2\cos^2 x+\log_{\sqrt{3}}(27^{\cos^2 x}-3^{\sin^2 x})=\frac{2}{\log_{12}3}+\log_9(3^{0,5+\cos 2x}-1)^4.$$

4. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза больше стороны основания?

Вариант 2

1. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

2. Решить неравенство:

$$\log_3[(x+2)(x-3)]\leqslant 4\log_9(2x+1)-\log_{\sqrt{7}}7.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$4^{\operatorname{tg}^2 x}-4^{\frac{1}{1+\cos 2x}}\log_{2\sqrt[3]{2}}4=-\log_{\sin x}\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

4. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 60°. Через точку A проведена плоскость, перпендикулярная биссектрисе угла S треугольника BSC. В каком отношении линия пересечения этой плоскости с плоскостью BSC делит площадь грани BSC?

Вариант 3

1. Колонна мотоциклистов с интервалом между соседними машинами 50 *м* движется со скоростью 15 *км/ч*. В противоположном направлении вдоль колонны (от первой машины) едет велосипедист. Поравнявшись с 45-м мотоциклистом, он увеличивает свою скорость на 10 *км/ч*, доезжает до последнего мотоциклиста, поворачивает и с той же увеличенной скоростью догоняет первую машину. Если бы

велосипедист все время (с самого начала) двигался с этой увеличенной скоростью, то он вернулся бы к голове колонны на $\frac{15}{8}$ минуты раньше. Найти первоначальную скорость велосипедиста (длины велосипеда, мотоцикла и время поворота велосипедиста не учитываются).

2. Решить неравенство:

$$2\log_4 x - \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x + 2) \leqslant \cos\frac{4\pi}{3}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$2^{\frac{5}{2}+\cos 2x} - (2^{\frac{3}{2}} - 1)\cdot 4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}$$

4. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани. Найти площадь получившегося сечения, если высота пирамиды равна h, а отношение боковой поверхности к площади основания равно $\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. В сосуд, содержащий 1 *л* воды, из двух кранов одновременно начинают наливать растворы кислоты: из первого — 10%-ный раствор со скоростью 1 *л* в час, а из второго — 20%-ный раствор со скоростью v *л* в час. Если бы из первого крана подавался 20%-ный раствор, а из второго — 10%-ный раствор, то концентрация кислоты в сосуде достигла бы значения 5% на $3\frac{3}{7}$ *мин* позже. Найти v, учитывая, что для получения пятипроцентной концентрации кислоты в сосуде потребовалось более пяти минут.

2. Решить неравенство:

$$\log_4(2x^2 + 3x + 1) \leqslant \log_2(2x + 2).$$

3. Найти все решения уравнения:

$$4\cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} - 16{,}5\cdot 4^{\cos x+\sin x} = -\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}} 16$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S

$$SA = SC,\ SB = 2AC,\ AB = BC = 1{,}5\ AC.$$

Через AC и середину D ребра SB проведена плоскость. Площадь полной поверхности пирамиды $SADC$ больше площади полной поверхности пирамиды $DABC$ на величину, равную площади основания пирамиды $SABC$. Определить угол наклона грани ASC к плоскости основания пирамиды $SABC$.

§ 16. Биолого-почвенный факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Найти все решения системы:

$$\frac{1+x^2+xy}{x+y}=2-y,$$

$$\log_{2^{1-y}} 2^{x^2}=1+y.$$

2. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}} 2 \leqslant \frac{1}{2}\log_{\sin\frac{\pi}{3}}\frac{4}{3}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$\cos(\pi\cdot 3^x)-2\cos^2(\pi\cdot 3^x)+2\cos(4\pi\cdot 3^x)-\cos(7\pi\cdot 3^x)=$$
$$=\sin(\pi\cdot 3^x)+2\sin^2(\pi\cdot 3^x)-2\sin(4\pi\cdot 3^x)+2\sin(\pi\cdot 3^{x+1})-$$
$$-\sin(7\pi\cdot 3^x).$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S и стороной основания a вписан шар, радиус которого равен $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Плоскость P, составляющая угол в 30° с плоскостью основания, касается шара и пересекается с плоскостью основания, не пересекаясь с самим основанием, по линии, параллельной стороне AB. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P.

Вариант 2

1. Найти все решения системы:

$$1+\frac{\log_2 21-1}{\log_2\frac{x-y}{21}}=\log_{\frac{x-y}{21}}2\cdot\log_2(x+y),$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi(x-2)}{2}=\cos\frac{\pi y}{2}-\sin\frac{\pi y}{2}.$$

2. Решить неравенство:

$$\frac{1}{2}\log_{x^2-2x-10}2\leqslant\log_{81}3.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$2\sin^2(\pi\cdot 2^{x+1})-4\sin(\pi\cdot 2^{x+1})+\sin(\pi\cdot 2^{x+2})+$$
$$+4\sin^2(\pi\cdot 2^x)=0.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S проведена секущая плоскость P, параллельная стороне AB, проходящая через точку касания вписанного шара и грани

SAB и через точку этого шара, ближайшую к вершине S. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P, если $AB = 1$, $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Вариант 3

1. Найти решения системы

$$\frac{1}{2}\sin(1 - y + x^2)\cos 2x = \cos(y - 1 - x^2)\sin x \cos x,$$

$$\log_{2^x}\frac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}} = 2 - x,$$

удовлетворяющие условию $y - 1 - x^2 + 2x \geqslant 0$.

2. Решить неравенство:

$$\log_{(x-1)(x+2)} 4 \leqslant \log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{3}.$$

3. Найти все решения уравнения:

$$2\cos^2(\pi \cdot 4^x) - \sin(\pi \cdot 4^{x+1}) + \sin(\pi \cdot 4^{x+\frac{1}{2}}) - 2\cos(\pi \cdot 4^{x+\frac{1}{2}}) = 0.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S и стороной основания $d\sqrt{3}$ вписан шар, радиус которого равен $\frac{d}{2}$. Плоскость P, составляющая угол в 30° с плоскостью основания, касается шара и пересекает основание пирамиды по линии, параллельной стороне AB (точка касания плоскости P с шаром лежит ниже центра шара). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P.

§ 17. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1967 г.

Вариант 1

1. Квадрат целого положительного простого числа N делится (с остатком) на три, полученное неполное частное делится (без остатка) на три, частное вновь (с остатком) делится на три, и, наконец, полученное неполное частное опять с остатком делится на три и дает в результате 16. Найти N.

2. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2 - 3x + 1) \geqslant 0.$$

3. Указать виды всех треугольников, у которых стороны составляют арифметическую прогрессию, а углы тоже составляют арифметическую прогрессию.

4. Решить уравнение:

$$2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y.$$

Вариант 2

1. Квадрат целого положительного числа N, увеличенный на девять, делится без остатка на неполное частное от деления числа N на три и дает в частном 130. Найти N.

2. Решить неравенство:

$$\log_{x+\frac{1}{x}}\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\right)\geqslant 1.$$

3. Углы треугольника ABC относятся как $4:2:1$, т. е. $A:B:C=4:2:1$. Доказать, что для сторон этого треугольника справедливо равенство

$$\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}=\frac{1}{AB}.$$

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x\,(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$$

Вариант 3

1. Квадрат целого положительного числа N, увеличенный на два, делится без остатка на неполное частное от деления N на четыре и дает в результате 201. Найти N.

2. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)\geqslant 0.$$

3. Указать виды всех треугольников, у которых стороны составляют геометрическую прогрессию, а углы арифметическую.

4. Решить систему уравнений:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \quad \sin^2 y + \cos^2 z = 1.$$

§ 18. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1967 г.

Вариант 1

1. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый. На мишени обнаружено 40 пробоин. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на один неудачный выстрел приходилось в 5 раз больше удачных выстрелов, чем у второго стрелка?

2. Решить неравенство:

$$(\log_2 t)^2 - \log_2 t - 2 \geqslant 0.$$

3. В круге радиуса r проведена хорда длины a. Вычислить площадь получившегося сегмента.

4. Решить уравнение:

$$12 - 6\cos^2 x - 13\sin x = 0.$$

Вариант 2

1. В течение 6-часового рабочего дня два станка вместе проработали 8 *ч* 30 *мин*. Сколько работал каждый станок, если известно, что отношение рабочего времени ко времени простоя у первого станка в полтора раза больше, чем у второго?

2. Решить неравенство:

$$(\log_2 t)^2 + \log_2 t - 2 \leqslant 0.$$

3. В круге с центром O проведена хорда AB. Вычислить площадь получившегося сегмента, если $\angle AOB = \alpha$, а радиус круга равен r.

4. Решить уравнение:

$$29 - 36\sin^2 x - 36\cos x = 0.$$

Вариант 3

1. Двое рабочих изготовили по 100 деталей каждый. Из общего числа изготовленных деталей 70 оказались первого сорта, остальные — второго. Сколько деталей первого сорта изготовил каждый рабочий, если известно, что у первого рабочего на каждую деталь первого сорта приходилось в 4 раза больше деталей второго сорта, чем у второго рабочего?

2. Решить неравенство:

$$(\log_3 t)^2 + 4\log_3 t + 3 \geqslant 0.$$

3. В трапеции $ABCD$ стороны $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение:

$$13 - 9\sin^2 x - 15\cos x = 0.$$

Вариант 4

1. В течение 6-часового рабочего дня общее время простоя двух станков составило 8 часов 30 минут. Сколько простоял каждый станок, если известно, что отношение времени простоя ко времени работы у первого станка в полтора раза меньше, чем у второго?

2. Решить неравенство:

$$(\log_3 t)^2 + 2\log_3 t - 3 \leqslant 0.$$

3. Из точки A, находящейся вне круга радиуса r, проведены касательные к окружности — AB и AC (B и C — точки касания), причем $\angle BAC = \alpha$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

4. Решить уравнение:

$$11 - 16 \sin^2 x + 16 \cos x = 0.$$

§ 19. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1967 г.

Вариант 1

1. Из деревни на станцию выехал на подводе бригадир. Сначала он ехал по проселочной дороге, но в полдень выехал на шоссе и оставшиеся 20 *км* проехал со скоростью, на 2 *км/ч* большей. Оказалось, что по проселку он ехал столько же времени, сколько и по шоссе. В 11 *ч* 30 *мин* из той же деревни отправился велосипедист, скорость которого по любой дороге одна и та же и вдвое превышает скорость подводы по проселочной дороге. Велосипедист обогнал подводу и прибыл на станцию на 5 *мин* раньше.

Найти расстояние от деревни до станции и скорости подводы и велосипедиста.

2. Решите неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sin 4x + 2) + \log_2 5 \geqslant 2 - \log_{\frac{1}{2}} \sin 4x.$$

3. Решите систему уравнений:

$$\log_x 3 = \log_y 9,$$
$$x^2 - 7y^2 + 26 = 0.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Дан круг с диаметром AB. Требуется указать на диаметре точку C такую, что сумма площадей кругов, построенных на отрезках AC и BC как на диаметрах, будет равна $^2/_3$ площади данного круга.

Опишите способ построения искомой точки с помощью циркуля и линейки.

4б) Каким числом способов можно распределить трех экзаменаторов между n экзаменующимися, если каждый экзаменующийся должен опрашиваться хотя бы одним экзаменатором? Один экзаменатор может проверять несколько экзаменующихся (хоть всех n экзаменующихся). Кроме того, не обязательно, чтобы каждый экзаменатор экзаменовал хотя бы одного человека.

Вариант 2

1. Пароход делает рейсы между двумя городами; он идет с одной скоростью при хорошей погоде и с другой — при плохой погоде. В понедельник хорошая погода во время рейса стояла

на 1 *ч* дольше, чем плохая. Во вторник пароход шел при хорошей погоде столько, сколько накануне при плохой, а при плохой погоде — на 1 *ч* 4 *мин* дольше. В среду пароход шел при хорошей погоде на 2 *ч* 30 *мин* дольше, чем накануне, и плохая погода застигла его в 9 *км* от места назначения. В четверг хорошая погода длилась на полчаса дольше, чем во вторник, а затем произошла авария, и пароход снизил скорость на 5 *км/ч*.

Найдите расстояние, которое проходил пароход за день, и скорость парохода в хорошую и плохую погоду, если пароход шел после аварии на полчаса дольше, чем до нее.

2. Решите неравенство:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \geqslant \frac{5}{8}.$$

3. Решите уравнение:

$$\log_5 [(2 + \sqrt{5})^x - (\sqrt{5} - 2)^x] = \frac{1}{2} - 3 \log_{\frac{1}{5}} 2.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Дан треугольник ABC. Требуется на стороне AB построить прямоугольник $ABDE$ такой, что его площадь вместе с площадью квадрата, построенного на стороне BD, равнялась бы площади треугольника ABC.

Опишите способ построения искомого прямоугольника с помощью циркуля и линейки.

4б) Сколько существует шестизначных чисел, у которых сумма первых трех цифр и сумма последних трех цифр одинаковы и равны 6?

Вариант 3

1. Между поселком A и городом $Г$ находятся бензоколонка $Б$ и водокачка B, которые делят расстояние $AГ$ на три равные части ($AБ = БВ = ВГ$). Из A в $Г$ выехали «Волга» и велосипедист, а из $Г$ в A одновременно с ними выехал грузовик, который у водокачки разминулся с «Волгой», а у бензоколонки — с велосипедистом. Велосипедист у бензоколонки увеличил свою скорость на 5 *км/ч*. «Волга» доехала до $Г$ и тут же повернула обратно со скоростью, на 8 *км/ч* меньшей, чем раньше. В результате в тот момент, когда грузовик прибыл в A, велосипедисту оставалось до B 7,5 *км*, а «Волга» находилась между $Б$ и A в 14 *км* от $Б$.

Найдите расстояние от поселка до города и скорости машин и велосипедиста.

2. Решите неравенство:

$$\sin^2 x \operatorname{tg} \frac{1}{1 + x^2} > \sin^2 x.$$

3. Решите систему уравнений:

$$x^2 + 4y^3 = 96,$$
$$\log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Дан большой круг, внутри которого находятся n непересекающихся меньших кругов. Требуется построить круг, площадь которого равна площади большого круга за вычетом площадей всех меньших кругов.

Опишите способ построения искомого круга с помощью циркуля и линейки.

4б) Каким числом способов 6 различных призов можно распределить между s участниками шахматного турнира, если каждый приз может быть либо вообще не вручен, либо вручен только одному шахматисту? Каждый шахматист может получить несколько призов (хоть все 6 призов). Кроме того, разумеется, каждый шахматист может и вообще не получить приза.

Вариант 4

1. Из сплошной ленты рабочий нарезает квадратики со стороной 1 *см*. Имеется лента трех сортов: средней ширины, на 1 *см* шире и на 1 *см* уже. В первый день было заказано нарезать 2400 квадратиков. Рабочий отрезал по куску от широкой и от узкой ленты, целиком использовал их и получил требуемое количество. Во второй день заказали на 100 квадратиков больше. Тогда он отрезал от широкой ленты кусок такой длины, как накануне от узкой, а от узкой — как накануне от широкой. В третий день было заказано на 500 квадратиков больше, чем в первый; рабочий отрезал от широкой ленты половину того куска, что накануне, а вместо узкой ленты взял среднюю и отрезал кусок вдвое длиннее, чем накануне от узкой.

Найдите ширину лент и длины кусков, которые отрезал рабочий.

2. Решите неравенство:

$$\log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geqslant 1.$$

3. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Дан прямоугольник $ABCD$, у которого сторона BC втрое больше, чем AB. Требуется на продолжениях сторон AB и BC отложить равные друг другу отрезки BE и BF, чтобы сумма площадей треугольников ABF, FEB и ECB была равна площади прямоугольника.

Опишите способ построения искомых отрезков с помощью циркуля и линейки.

4б) Автобусные билеты нумеруются всевозможными комбинациями из шести цифр, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, состоящих только из цифр 0, 1 и 2, у которых сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр?

Вариант 5

1. Рабочие Иванов и Петров обрабатывают детали на двух станках-автоматах. По плану они должны выпускать вместе 2000 деталей в неделю. В первую неделю оба работали с одинаковой скоростью. Во вторую неделю Петров повысил скорость обработки, но из-за болезни работал только 27 *ч* вместо полной рабочей недели, т. е. 41 *ч*. В третью неделю Иванов ушел в отпуск, и вместо него поставили Новикова. Новиков потратил 1 *ч* на ознакомление со станком, после чего начал работать, но до конца недели работал на малой скорости и обрабатывал на 6 деталей в час меньше, чем Иванов. Петров же выздоровел и всю третью неделю работал с такой же скоростью, как во вторую. Оказалось, что в третью неделю было выпущено на 180 деталей больше, чем во вторую, и на 104 детали меньше, чем в первую.

Сколько деталей в час обрабатывал каждый рабочий в каждую неделю? Определите процент выполнения плана в каждую неделю.

2. Решить неравенство:

$$\log_{2\sin\frac{x}{2}} 16 + \log_2 \sin\frac{x}{2} \leqslant 3.$$

3. Решить уравнение:

$$2\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(13 - x) = \log_2(x - 10)^2 + 2\log_4(8 - x).$$

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее:

4а) Дана пирамида, в основании которой лежит квадрат и высота которой равна стороне основания. Требуется построить трехгранную призму, у которой высота равна данному отрезку h, а в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, такую, что ее объем равен объему данной пирамиды.

Опишите способ построения основания призмы с помощью циркуля и линейки.

4б) В некотором ряду кинотеатра $2n$ мест. Каким числом способов можно рассадить по местам этого ряда n юношей и n девушек так, чтобы никакие две девушки не сидели рядом?

§ 20. Факультет психологии, 1967 г.

Вариант 1

1. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка A лежит на одной прямой, точка B — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра

скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми.

Найти угол между общим перпендикуляром прямых и прямой AB. Обратить внимание на возможность неоднозначного решения задачи.

2. При каких значениях b уравнение

$$\frac{b\cos x}{2\cos 2x - 1} = \frac{b + \sin x}{(\cos^2 x - 3\sin^2 x)\operatorname{tg} x}$$

имеет решение? Найти это решение.

3. Достаточно ли приобрести 4000 штук кафельных плиток размером 10 *см* $\times$ 10 *см* для облицовки внутренних стенок бортов бассейна площадью 450 $м^2$? Известно, что бассейн имеет форму ромба, а высота борта равна 0,5 *м*.

4. Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий

$$2, 5, 8, \ldots, 332$$

и

$$7, 12, 17, \ldots, 157.$$

Сколько имеется таких чисел?

5. В правильной четырехугольной пирамиде с высотой y и стороной основания x площадь основания на 1 кв. ед. больше площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и диагональ основания. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически.

Вариант 2

1. Две вершины некоторого треугольника лежат на ребре двугранного угла. Известны расстояния от третьей вершины треугольника до граней и углы наклона плоскости треугольника к плоскостям граней. Найти отношение объемов пирамид, имеющих основанием данный треугольник, а вершинами — точки, в которых перпендикуляры к граням, опущенные из центра тяжести треугольника, пересекаются с гранями.

2. При каких значениях b уравнение

$$\frac{\sin^2 2x + b}{\sin^2 6x + \cos 6x\,(1 + \cos 6x)} = \frac{b^2 - \operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)}{2\cos^2 3x}$$

имеет решение? Найти это решение.

3. Для изготовления каркасов полотняных домиков кубической формы используют алюминиевые трубки ценой 2 руб. за метр. На покупку трубок для каркасов двух домиков израсходовали 144 руб. Может ли случиться так, что общий объем домиков окажется меньше 50 $м^3$?

4. Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий:

$$5, 9, 13, \ldots;$$
$$3, 9, 15, \ldots,$$

если известно, что каждая прогрессия содержит по 200 членов.

5. В основании первого цилиндра лежит круг радиуса y, большего чем радиус x основания второго цилиндра. Высота первого цилиндра равна $^1/_8$, второго $^1/_2$. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически, если разность между площадью боковой поверхности и площадью основания первого цилиндра равна площади боковой поверхности второго.

Вариант 3

1. Отрезок AB находится на ребре двугранного угла, M — точка на одной из граней, удаленная от ребра на расстояние l. Перпендикуляр, опущенный из M на другую грань, виден из A под углом α, из B — под углом β, а расстояние от центра тяжести треугольника ABM до второй грани равно m. Найти длину отрезка AB. Обратить внимание на возможность неоднозначного решения задачи.

2. При каких значениях a уравнение

$$\frac{\cos^2 2x}{1-\sin 4x} = \frac{(\sec^2 x - 1)\operatorname{ctg}^2 x - a^2}{(\sin 2x - \cos 2x)^2}$$

имеет решение? Найти это решение.

3. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, все ее боковые ребра равны, а высота пирамиды равна $\sqrt{2}$ *см*. По ребрам пирамиды со скоростью 1 *см/сек* ползет жук. Хватит ли ему двух секунд на то, чтобы опуститься с вершины пирамиды по боковому ребру, если вдоль периметра основания он проползает за восемь секунд?

4. Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 407$$

и

$$2,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ 709.$$

Сколько имеется таких чисел?

5. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 0,5, а стороны основания x и y. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически, если известно, что боковая поверхность параллелепипеда равна площади основания.

Вариант 4

1. На двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, кратчайшее расстояние между которыми $AB = h$, даны две точки C и D, из которых отрезок AB виден под углами α и β соответственно.

Найти полную поверхность пирамиды $CABD$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\frac{a^2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}$$

имеет решение? Найти это решение.

3. Прямоугольный участок площадью 900 $м^2$ необходимо огородить забором, две смежные стороны которого каменные, а две другие — деревянные. Один метр деревянного забора стоит 10 руб., а каменного — 25 руб. На строительство выделено 2000 руб. Хватит ли этой суммы?

4. Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии

$$12,\ 15,\ 18,\ \ldots$$

и геометрической —

$$1,\ 3,\ 9,\ \ldots$$

Известно, что каждая из прогрессий содержит по 100 членов.

5. Задан цилиндр с радиусом основания x и высотой y. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически, если известно, что сумма площадей оснований на 2π квадратных единиц меньше боковой поверхности.

ГЛАВА III

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ, 1966 г.

§ 21. Механико-математический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Ответ: 4 *км/ч.*

2. Рассмотрим два случая:

1°. $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда данное неравенство эквивалентно следующей смешанной системе:

$$5 + 2(1 - 2\sin^2 x) \leqslant 3(2\sin x - 1),$$
$$\sin x \geqslant \frac{1}{2},$$

или

$$(2\sin x + 5)(\sin x - 1) \geqslant 0,$$
$$\sin x \geqslant \frac{1}{2},$$

и так как $2\sin x + 5 > 0$, то

$$\sin x - 1 \geqslant 0,$$
$$\sin x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\sin x = 1$ и, значит,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

2°. $\sin x < \frac{1}{2}$. В этом случае данное неравенство эквивалентно следующей смешанной системе:

$$5 + 2(1 - 2\sin^2 x) \leqslant 3 - 6\sin x,$$
$$\sin x < \frac{1}{2}$$

или

$$2(\sin x - 2)(\sin x + \frac{1}{2}) \geqslant 0,$$
$$\sin x < \frac{1}{2},$$

и так как $\sin x - 2 < 0$, то

$$\sin x + \frac{1}{2} \leqslant 0,$$

$$\sin x < \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ и, значит, $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, где k принимает все целые значения.

3. Обозначим через K и M точки прикосновения данного шара соответственно с ребрами SA и SC, а через O центр данного шара. Тогда $\triangle SKO = \triangle SMO$ (рис. 4). В самом деле, эти треугольники

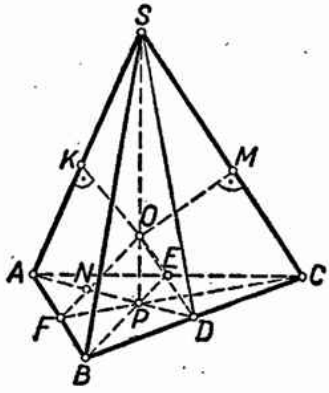


Рис. 4

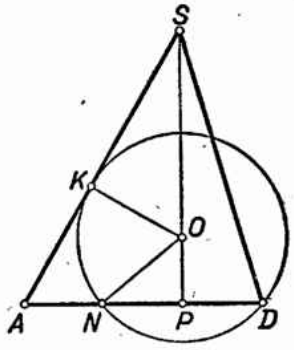


Рис. 5

имеют общую гипотенузу SO и равные катеты $SK = SM$ (отрезки касательных, проведенных из точки S к данному шару). Поэтому $\angle ASO = \angle CSO$. Далее, центр O данного шара лежит на высоте SP данной пирамиды (P — прямоугольная проекция точки S на плоскость ABC). Поэтому $SOP \perp AP$, $SOP \perp CP$, и, значит, $\triangle ASP = \triangle CSP$ (эти треугольники прямоугольные, имеют общий катет SP и $\angle ASP = \angle CSP$). Следовательно, $AP = CP$. Аналогично доказывается, что $AP = BP$.

Обозначим через F, E и D соответственно точки прикосновения данного шара с ребрами AB, AC и BC. Сечение данного шара плоскостью ABC является окружностью, вписанной в треугольник ABC и касающейся его сторон AB, AC и BC соответственно в точках F, E и D.

Далее,

$$\triangle OPD = \triangle OPE = \triangle OPF,$$

так как эти треугольники прямоугольные, имеют общий катет OP и $OD = OE = OF = r$. Следовательно, $PE = PF = PD$. Но $PA = PB = PC$, значит, все шесть прямоугольных треу-

гольников APE, PAF, PBF, PBD, PCD и PCE равны, так как они имеют равные катеты ($PF = PE = PD$) и соответственно равные гипотенузы ($PA = PB = PC$). Отсюда следует, что $AF = BF = BD = CD = CE = AE$, и, значит, $\triangle ABC$ правильный; P — центр вписанной в него окружности.

Таким образом, пирамида $SABC$ правильная. Остается вычислить высоту h пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды и данного шара плоскостью $SAPD$ (рис. 5). Обозначим через N вторую точку пересечения AD с окружностью, полученной при пересечении указанной плоскости с данным шаром.

Имеем:

$$SO = r\sqrt{3},\ OK = ON = r,$$
$$OP = SP - SO = h - r\sqrt{3}.$$

Из треугольника NPO находим:

$$NP = \sqrt{r^2 - (h - r\sqrt{3})^2}$$

и далее

$$PD = NP,\ AP = 2PD = 2NP.$$

Из треугольника APS находим:

$$AS = \sqrt{h^2 + AP^2} = \sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2\right]}.$$

Так как $\triangle APS \sim \triangle OKS$, то $OK : OS = AP : AS$,

$$\frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{r^2 - (h - r\sqrt{3})^2}}{\sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2\right]}}.$$

Упрощая это уравнение, будем иметь:

$$9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0.$$

Отсюда

$$h = \frac{8r\sqrt{3} \pm 4r\sqrt{3}}{9},$$

и так как должно быть $h > r\sqrt{3}$, то

$$h = \frac{4r}{\sqrt{3}}.$$

4. Пусть x и y — длины сторон прямоугольника, лежащего в основании постамента. Тогда по условию задачи высота z постамента равна $\sqrt{x^2 + y^2}$, а его поверхность

$$\sigma = 2xy + 2x\sqrt{x^2 + y^2} + 2y\sqrt{x^2 + y^2} =$$
$$= 8 + 2(x + y)\sqrt{x^2 + y^2} =$$
$$= 8 + 2\left(x + \frac{4}{x}\right)\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} =$$
$$= 8 + 2\left(x + \frac{4}{x}\right)\sqrt{\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 8}.$$

Величина σ будет наименьшей при условии, что

$$p = x + \frac{4}{x}$$

принимает наименьшее значение. Имеем:

$$p = x + \frac{4}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4,$$

и, значит, p принимает наименьшее значение, если

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

т. е.

$$x = 2,$$

но тогда

$$y = 2,$$
$$z = 2\sqrt{2}.$$

Наименьшее значение поверхности постамента равно ($p_{\min} = 4$):

$$\sigma_{\min} = 8 + 2 \cdot 4\sqrt{16 - 8} = 8 + 16\sqrt{2}\ м^2.$$

5. Прежде всего заметим, что если (x_0, y_0) — решение данной системы (x_0, y_0 — действительные числа и $x_0 > 0$), то $(x_0, -y_0)$ также решение данной системы. Но так как по условию система должна иметь единственное решение, то $y_0 = 0$. Итак, если система имеет единственное решение, то это решение должно иметь вид $(x_0, 0)$ $(x_0 > 0)$, но тогда из уравнений системы следует, что $a = 0$, $b > 0$, и она принимает вид:

$$x^y = 1,\ x^2 + y^2 = b,\ b > 0.$$

Из уравнения $x^y = 1$ следует, что либо $x = 1$, либо $y = 0$. Если $y = 0$, то $x = \sqrt{b}$ и система имеет решение $(\sqrt{b}, 0)$. Если $x = 1$, то $y^2 = b - 1$. Если $0 < b < 1$, то система $y^2 = b - 1$, $x = 1$ решений не имеет (по условию задачи y — действительное число). Если $b = 1$, то система $x = 1$, $y^2 = b - 1$ имеет решение (1,0), которое совпадает с решением $(\sqrt{b}, 0)$, найденным выше. Если, наконец, $b > 1$, то система $x = 1$, $y^2 = b - 1$ имеет два решения $(1, \pm\sqrt{b-1})$. Итак, данная система имеет только одно решение $(\sqrt{b}, 0)$ тогда и только тогда, когда $a = 0$, $0 < b \leqslant 1$.

Вариант 2

1. Ответ: первый корабль вышел из порта на 14 часов раньше второго.

2. Область определения функций, входящих в левую и правую части данного неравенства, такова:

$$0 < \operatorname{tg} x \neq 1.$$

Переписывая неравенство в виде:

$$(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 - \log_{\operatorname{tg} x} 3 - 2 \leqslant 0,$$

заключаем, что

$$-1 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leqslant 2.$$

Рассмотрим два случая:

1°. $\operatorname{tg} x > 1$. Тогда $\log_{\operatorname{tg} x} 3 > 0$ и неравенство $-1 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3$ выполняется. Неравенство же

$$\log_{\operatorname{tg} x} 3 \leqslant 2 = \log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg}^2 x$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$3 \leqslant \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3},$$

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

2°. $0 < \operatorname{tg} x < 1$. В этом случае $\log_{\operatorname{tg} x} 3 < 0$, и, значит, неравенство $\log_{\operatorname{tg} x} 3 \leqslant 2$ выполняется. Неравенство $-1 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3$ или $\log_{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x)^{-1} \leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3$ выполняется при условии $(\operatorname{tg} x)^{-1} \geqslant 3$, $0 < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{1}{3}$, откуда

$$k\pi < x \leqslant k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3},$$

где k принимает все целые значения.

3. Пусть S — вершина данной пирамиды, а ABC — ее основание (рис. 6). Обозначим через D и E соответственно середины отрезков AC и CB, а через O_1 и O_2 точки, делящие отрезки SD и SE в отношении 2 : 1:

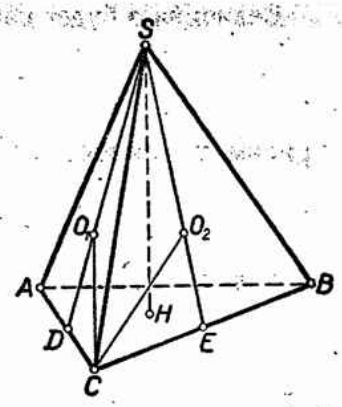


Рис. 6

$$\frac{SO_1}{O_1D} = 2, \quad \frac{SO_2}{O_2E} = 2.$$

Точки O_1 и O_2 являются точками пересечения медиан треугольников ASC и CSB. Шар, о котором говорится в условии задачи, касается граней SAC и SBC соответственно в точках O_1 и O_2, а потому

$$SO_1 = SO_2,\ CO_1 = CO_2.$$

Отсюда следует, что $\triangle SO_1C = \triangle SO_2C$, и, следовательно, $\angle CSD = \angle CSE$. Так как $SD = \frac{3}{2} SO_1$, $SE = \frac{3}{2} SO_2$ и $SO_1 = SO_2$, то $SD = SE$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\triangle SEC = \triangle SDC$, поэтому $CD = EC$ и $\angle SCD = \angle SCE$. Из равенства $CD = EC$ следует, что $AC = CB$. Теперь можно утверждать, что $\triangle SAC = \triangle SCB$ (SC — их общая сторона, $AC = BC$ и $\angle SCB = \angle SCA$), а, следовательно, $SA = SB$.

Повторяя аналогичные рассуждения для граней SBC и SAB, докажем, что $AB = BC$ и $SA = SC$. Итак,

$$AB = BC = CA,$$
$$SA = SB = SC,$$

т. е. пирамида $SABC$ правильная.

Далее (это мы предоставляем доказать читателю самостоятельно) надо доказать, что центр шара, о котором говорится в условии задачи, лежит на высоте SH пирамиды $SABC$. Вычисление радиуса этого шара также предоставляется читателю. Приводим только ответ:

$$r = \frac{2\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{6}}{9\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{6}-3} h$$

или

$$r = \frac{h \sin\frac{\alpha-\pi}{3}}{4\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{6}\sin\frac{\alpha-2\pi}{6}}.$$

4. Пусть x и y — длины катетов, лежащих в основании призмы, z — высота призмы. Выражая все длины в метрах, будем иметь:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \tag{1}$$

$$\left(x + y + \frac{1}{2}\right) z = \frac{24}{25}. \tag{2}$$

Сумма длин всех ребер равна:

$$s = 1 + 2x + 2y + 3z = 1 + 2x + 2y + \frac{144}{25(1 + 2x + 2y)} =$$

$$= \left(\sqrt{1 + 2x + 2y} - \frac{12}{5\sqrt{1 + 2x + 2y}}\right)^2 + \frac{24}{5}.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение, равное $\frac{24}{5}$ *м*, для суммы s достигается при условии, что выражение, заключенное в круглых скобках в последнем выражении, равно 0, т. е.

$$1 + 2x + 2y = \frac{12}{5},$$

откуда

$$x+y=\frac{7}{10}.$$

Решая систему уравнений

$$x+y=\frac{7}{10},\ x^2+y^2=\frac{1}{4},$$

получим:

$x = 0{,}3$ *м*, $y = 0{,}4$ *м* (или наоборот),

а из уравнения (2) найдем:

$$z = 0{,}8 \text{ м},$$

или в сантиметрах: $x = 30$ *см*, $y = 40$ *см*, $z = 80$ *см*.

5. Предположим, что данная система имеет решение, удовлетворяющее условию $x + y = 0$, иначе говоря, предположим, что данная система имеет решение вида $(x, -x)$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x^3(1+a) &= \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3(2-a) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

При $a = -1$ эта система уравнений относительно x и a совместна и имеет одно решение: $a = -1$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Если $a \neq -1$, то из системы (1) выводим:

$$x^3 = \frac{a+1}{2},\quad x^3 = \frac{1}{2-a} \quad (\text{считаем } a \neq 2)$$

и, значит,

$$\frac{a+1}{2} = \frac{1}{2-a},$$

откуда $a = 0$ и $a = 1$. Итак, *если* данная система имеет решение, удовлетворяющее условию задачи, *то* или $a = 0$, или $a = 1$, или $a = -1$. Однако утверждать, что все эти значения a дают ответ на вопрос задачи, нельзя, так как в условии задачи сказано, что *всякое* решение системы должно удовлетворять условию $x + y = 0$. Иначе говоря, можно сказать, что получен лишь *необходимый* признак (или $a = 0$, или $a = -1$, или $a = 1$) того, что данная система обладает свойством, указанным в условии задачи, и остается исследовать еще достаточность. Итак, рассмотрим три случая.

1°. $a = 0$. При этом значении a данная система имеет два решения (x и y по условию задачи действительные числа):

1) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Только одно из этих решений удовлетворяет условию $x + y = 0$.

2°. $a = 1$. Данная система принимает вид:

$$x^3 - y^3 = 2,$$
$$x^3 + x^2y + xy^2 - 1 = 0.$$

Отсюда находим:

$$x^3 - y^3 = 2,$$
$$2x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 2 = 0,$$

или

$$x^3 - y^3 = 2,$$
$$2x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - x^3 + y^3 = 0,$$

или

$$x^3 - y^3 = 2,$$
$$(x + y)(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Над полем действительных чисел эта система эквивалентна следующей:

$$x^3 - y^3 = 2,$$
$$x + y = 0.$$

Отсюда $x = 1$, $y = -1$.

Итак, при $a = 1$ данная система имеет только одно решение $x = 1$, $y = -1$, и для этого решения условие $x + y = 0$ выполняется.

3°. $a = -1$. При этом значении a данная система принимает вид:

$$x^3 + y^3 = 0,$$
$$x^3 - x^2y + xy^2 = 1$$

и имеет только одно решение $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, которое удовлетворяет условию $x + y = 0$.

Итак, все значения a, удовлетворяющие условию задачи, таковы: $a = -1$ и $a = 1$.

Вариант 3

1. Ответ: обратный путь занял бы у туристов 16 часов, если бы они весь этот путь шли на веслах.

2. Решение:

$$\left| 3^{\operatorname{tg} \pi x} - \frac{3}{3^{\operatorname{tg} \pi x}} \right| \geqslant 2,$$
$$\left| (3^{\operatorname{tg} \pi x})^2 - 3 \right| \geqslant 2 \cdot 3^{\operatorname{tg} \pi x}.$$

Рассмотрим два случая:

1°. $3^{\operatorname{tg}\pi x} \geqslant \sqrt{3}$. Тогда

$$(3^{\operatorname{tg}\pi x})^2 - 2 \cdot 3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3 \geqslant 0,$$

$$(3^{\operatorname{tg}\pi x} + 1)(3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3) \geqslant 0,$$

$$3^{\operatorname{tg}\pi x} \geqslant 3,$$

$$\operatorname{tg}\pi x \geqslant 1.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant \pi x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

или

$$\frac{1}{4} + k \leqslant x < \frac{1}{2} + k,$$

где k принимает все целые значения.

2°. $3^{\operatorname{tg}\pi x} < \sqrt{3}$. Тогда

$$(3^{\operatorname{tg}\pi x})^2 + 2 \cdot 3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3 \leqslant 0,$$

$$(3^{\operatorname{tg}\pi x} + 3)(3^{\operatorname{tg}\pi x} - 1) \leqslant 0,$$

$$3^{\operatorname{tg}\pi x} \leqslant 1,$$

$$\operatorname{tg}\pi x \leqslant 0.$$

Отсюда

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \pi x \leqslant k\pi$$

или

$$-\frac{1}{2} + k < x \leqslant k,$$

где k принимает все целые значения.

3. Пусть S — вершина данной пирамиды, ABC — основание, D, E, F — соответственно середины сторон AC, AB и BC. Плоскость ABC пересекает данный шар по окружности, касающейся сторон AC, AB и BC соответственно в их серединах D, E и F (рис. 7). Так как $BF = FC$ и $BF = BE = EA$, то $BC = BA$. Аналогично доказывается, что $BC = AC$. Итак, $AB = BC = CA$, т. е. треугольник ABC правильный.

Пусть K — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим середины ребер SA, SB и SC соответственно через A_1, B_1 и C_1 (рис. 8). По условию точки A_1, B_1 и C_1 лежат на поверхности данного шара; $\triangle A_1B_1C_1$ правильный, и его стороны соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна половине стороны треугольника ABC. Плоскость треугольника $A_1B_1C_1$ пересекает данный шар по окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть K_1 — центр этой

окружности; прямая KK_1 перпендикулярна плоскостям обоих треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Так как $K_1A_1 = \frac{1}{2}KA$, $K_1B_1 = \frac{1}{2}KB$, $K_1C_1 = \frac{1}{2}KC$, то точки A_1, B_1, C_1 проектируются на плоскость ABC в середины A_0, B_0, C_0 отрезков KA, KB и KC, т. е. в точки пересечения окружности, вписанной в треугольник ABC, с отрезками KA, KB и KC. Так как S — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1, то проекция точки S на плоскость ABC совпадает с точкой пересечения проекций AA_0 и BB_0 прямых AA_1 и BB_1 на плоскость ABC. Таким образом, проекция точки S на плоскость ABC есть точка K, и, значит, пирамида $SABC$ правильная.

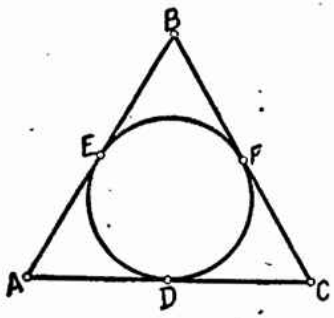


Рис 7

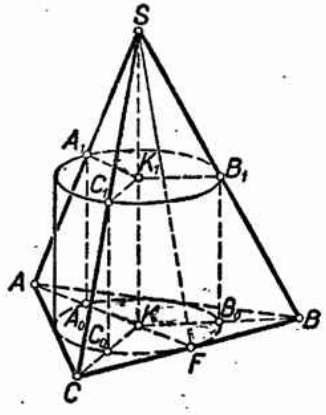


Рис. 8

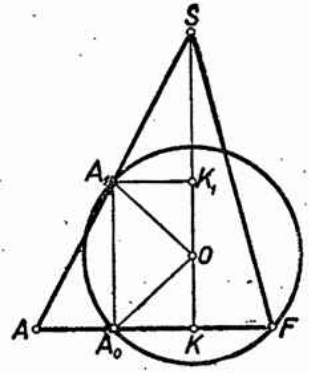


Рис. 9

Проекция центра шара в плоскость любого его плоского сечения совпадает с центром этого сечения, значит, точка K является также и проекцией центра данного шара на плоскость ABC. Значит, центр O данного шара лежит на высоте SK пирамиды $SABC$. Проведем еще сечение пирамиды и данного шара плоскостью ASK (рис. 9).

Положим $OA_0 = r$. Имеем:

$$r^2 = OK^2 + A_0K^2, \quad A_0K = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Далее, так как $AA_0 = A_0K$ и $AA_1 = A_1S$ (A_1 — середина отрезка AS), то $A_1A_0 \parallel SK$, и так как точка O равноудалена от точек A_1 и A_0, то O — середина отрезка K_1K, где K_1 — проекция точки A_1 на высоту SK. Итак,

$$OK = \frac{1}{4}H,$$

где $H = SK$ — высота пирамиды. Теперь находим:

$$s = 3\frac{a}{2}SF, \quad SF = \frac{2s}{3a},$$

$$H^2 = SK^2 = SF^2 - KF^2 = \frac{4s^2}{9a^2} - \frac{a^2}{12},$$

и потому

$$r^2 = \frac{4s^2}{9 \cdot 16 \cdot a^2} - \frac{a^2}{12 \cdot 16} + \frac{a^2}{12} = \frac{16s^2 + 45a^4}{36 \cdot 16a^2},$$

откуда

$$r = \frac{\sqrt{16s^2 + 45a^4}}{24a}.$$

4. Пусть x и y — длины сторон прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда, а z — его высота.

Тогда

$$xy = 1,$$
$$4x + 4y + 4z = 20,$$

или

$$xy = 1,$$
$$z = 5 - (x + y).$$

Площадь поверхности параллелепипеда равна:

$$\sigma = 2 + 2(x + y)z = 2 + 10(x + y) - 2(x + y)^2.$$

Эта функция достигает наибольшего значения при

$$x + y = \frac{5}{2}.$$

Решая систему

$$x + y = \frac{5}{2}, \quad xy = 1,$$

получим:

$$x = 2, \; y = \frac{1}{2} \quad \text{(или наоборот)}$$

и далее $z = \frac{5}{2}$.

5. Прежде всего заметим, что если (x_0, y_0, z_0) решение данной системы, то $(-x_0, -y_0, z_0)$ также решение данной системы, и, значит, для того чтобы система имела только одно решение, *необходимо* (но не достаточно!), чтобы решение системы имело вид $(0, 0, z)$. При этом условии данная система примет вид:

$$z = a,$$
$$z = b,$$
$$z^2 = 4,$$

и эта система будет иметь только одно решение, соответственно (0, 0, 2) и (0, 0, — 2), в двух случаях: $a = b = 2$ и $a = b = -2$.

Итак, для того чтобы данная система имела только одно решение, *необходимо*, чтобы или $a = b = 2$, или $a = b = -2$.

1°. Пусть $a = b = 2$. Система принимает вид:

$$\begin{aligned} xyz + z &= 2, \\ xyz^2 + z &= 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

и имеет более чем одно решение; полагая, например, $z=1$, получим:

$$\begin{aligned} xy &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 3, \end{aligned}$$

и таким образом находим четыре различных решения.

2°. Пусть $a = b = -2$. Тогда данная система принимает вид:

$$\begin{aligned} xyz + z &= -2, \\ xyz^2 + z &= -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы находим:

$$(-2 - z)\, z + z = -2,$$

откуда или $z = -2$, или $z = 1$. Если $z = -2$, то система примет вид:

$$\begin{aligned} -2xy &= 0, \\ 4xy &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $x = y = 0$ и единственное действительное решение системы (0, 0, —2). Если $z = 1$, то система примет вид:

$$\begin{aligned} xy &= -3, \\ xy &= -3, \\ x^2 + y^2 &= 3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^2 + xy + y^2 = 0,$$

и так как x и y действительные числа, то из последнего равенства следует, что $x = y = 0$. Однако (0, 0, 1) не является решением системы.

Итак, только при $a = b = -2$ данная система имеет и притом только одно решение $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$ (при условии, конечно, что a, b, x, y, z — действительные числа).

Вариант 4

1. Ответ: $AB = 300$ *км*.

2. Область определения функций, входящих в левую и правую части неравенства: $0 < \sin x < 1$.

Перепишем данное неравенство так:

$$(\log_{\sin x} 2)^2 - 2\log_{\sin x} 2 - 3 < 0$$

или

$$(\log_{\sin x} 2 - 3)(\log_{\sin x} 2 + 1) < 0;$$

так как $0 < \sin x < 1$, то $\log_{\sin x} 2 < 0$ и, значит, $\log_{\sin x} 2 - 3 < 0$. Таким образом, имеем:

$$\log_{\sin x} 2 > -1 = \log_{\sin x} (\sin x)^{-1}.$$

Отсюда

$$(\sin x)^{-1} > 2,\ 0 < \sin x < \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$2k\pi + \frac{5\pi}{6} < x < (2k+1)\pi,$$

где k принимает все целые значения.

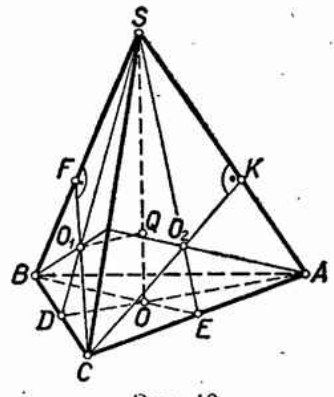


Рис. 10

3. Обозначим через D и E проекции точки S на стороны BC и AC, а через F и K — проекции точки C на стороны SB и SA (рис. 10). Пусть O_1 и O_2 соответственно точки пересечения высот треугольников SBC и SAC. Тогда $CO_1 = CO_2$ и $SO_1 = SO_2$, а потому $\triangle SCO_1 = \triangle SCO_2$. Из равенства $\triangle SCO_1 = \triangle SCO_2$ следует, что $\angle CSO_1 = \angle CSO_2$ и $\angle SCO_1 = \angle SCO_2$.

Далее, треугольники SCD и SCE прямоугольные, имеют общую гипотенузу SC и равные углы: $\angle CSD = \angle CSE$. Следовательно, $\triangle SCD = \triangle SCE$, а потому $\angle SCD = \angle SCE$.

Далее, $\triangle CSF = \triangle SCK$, так как эти треугольники прямоугольные, имеют общую гипотенузу SC и $\angle SCF = \angle SCK$.

Отсюда следует, что $\angle CSB = \angle CSA$.

Теперь ясно, что $\triangle SBC = \triangle SAC$ (сторона SC общая и углы, прилежащие к этой стороне в одном треугольнике, равны соответствующим углам, прилежащим к той же стороне SC в другом треугольнике).

Значит, $SA = SB$ и $\angle ASC = \angle CSB$. Аналогично доказывается, что $SA = SC$ и $\angle ASB = \angle BSC$. Итак,

$$SA = SB = SC,$$

$$\angle BSC = \angle CSA = \angle ASB,$$

а потому пирамида $SABC$ правильная.

Вычислим длину b ее бокового ребра.

Плоский угол при вершине равен $\frac{\alpha}{3}$. Читателю предлагается

доказать самостоятельно, что центр шара, о котором говорится в условии задачи, лежит на высоте пирамиды $SABC$, опущенной из точки S на основание ABC.

Имеем (рис. 10):

$$CD = b\sin\frac{\alpha}{6},\quad SD = b\cos\frac{\alpha}{6},\quad CD = \frac{1}{2}CB,$$

$$2CD = 2b\sin\frac{\alpha}{6},\quad AD = BC\frac{\sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{6},$$

$$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{b}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{6}.$$

Из треугольника CSF имеем: $SF = b\cos\frac{\alpha}{3}$. Из треугольника O_1SF имеем:

$$SO_1 = \frac{SF}{\cos\frac{\alpha}{6}} = \frac{b\cos\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{6}}.$$

Далее, $\triangle ODS \sim \triangle QSO_1$ (Q — центр данного шара), следовательно, $QO_1 : SO_1 = OD : OS$, и так как

$$OS = \sqrt{SD^2 - OD^2} = b\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{6} - \frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{6}},$$

то

$$\frac{r\cos\frac{\alpha}{6}}{b\cos\frac{\alpha}{3}} = \frac{b\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{6}}{b\sqrt{3}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{6} - \sin^2\frac{\alpha}{6}}}.$$

Отсюда

$$b = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{6} - \sin^2\frac{\alpha}{6}} =$$

$$= \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{6}} = r\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{6}}}.$$

4. Пусть x и y — катеты треугольника, лежащего в основании призмы. Тогда

$$xy = 4,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \text{ — высота призмы.}$$

Боковая поверхность призмы равна:

$$\sigma = (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})\, z = (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= \left(x + \frac{4}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}\right)\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} =$$

$$= \left(x + \frac{4}{x} + \sqrt{\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 8}\right)\sqrt{\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 8}.$$

Это выражение будет иметь наименьшее значение, если наименьшее значение будет иметь сумма

$$x + \frac{4}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4.$$

Отсюда следует, что σ будет иметь наименьшее значение при $x = 2$; при этом

$$\sigma_{\min} = (4 + \sqrt{16 - 8})\sqrt{16 - 8} = 8(\sqrt{2} + 1)\ м^2.$$

Величина второго катета $y=2$; в основании призмы с наименьшей боковой поверхностью лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 *м*.

5. Данная система должна иметь хотя бы одно решение, например, при $b = 0$. Но при $b = 0$ она принимает вид:

$$(x^2 + 1)^a = 1,\ a + x^2 y = 1.$$

Отсюда либо $x = 0$, тогда $a = 1$, y — любое число, либо $a = 0$, тогда если x — любое действительное число, не равное нулю, то $y = \frac{1}{x^2}$.

Итак, *необходимое* условие того, что данная система при любом действительном значении b имеет хотя бы одно решение, таково: или $a = 0$, или $a = 1$. Однако это условие может оказаться недостаточным: Проведем исследование.

1°. $a = 0$. Данная система примет вид:

$$(b^2 + 1)^y = 1,\ bxy + x^2 y = 1.$$

Так как здесь b — любое действительное число, то из первого уравнения найдем: $y = 0$. Но при этом значении y второе уравнение $bxy + x^2 y = 1$ не удовлетворяется.

Итак, если $a = 0$, то *не при любом значении* b система *имеет* хотя бы одно решение.

2°. $a = 1$. Данная система примет вид:

$$x^2 + (b^2 + 1)^y = 1,$$

$$bxy + x^2 y = 0.$$

Эта система имеет решение $x = 0$, $y = 0$ при любом действительном значении b.

Итак, данная система при любом b имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $a = 1$.

Вариант 5

1. Ответ: за 40 *мин*.

2. Прежде всего заметим, что должны быть выполнены неравенства $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k принимает все целые значения. Далее,

$$\operatorname{tg}^2 x \leqslant \left| 1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} \right|,$$

$$\operatorname{tg}^4 x \leqslant |\operatorname{tg}^2 x - 2| .$$

Если $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 2$, то $\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x + 2 \leqslant 0$ — неравенство решений не имеет. Если же $\operatorname{tg}^2 x < 2$, то неравенство принимает вид:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \leqslant 0$$

или

$$(\operatorname{tg}^2 x + 2)(\operatorname{tg}^2 x - 1) \leqslant 0,$$

откуда

$$0 < \operatorname{tg}^2 x \leqslant 1,$$

или

$$0 < |\operatorname{tg} x| \leqslant 1,$$

или

$$-1 \leqslant \operatorname{tg} x < 0, \qquad 0 < \operatorname{tg} x \leqslant 1,$$

и окончательно

$$k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

3. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных вокруг граней SBC и SAC. Так как $CO_1 = CO_2$, $SO_1 = SO_2$, то $\triangle SO_1C = \triangle SO_2C$ и, значит, $\angle CSO_1 = \angle CSO_2$. Но по условию $\angle CSA = \angle CSB$, значит, $\angle O_1SB = \angle O_2SA$.

Обозначим через D и E соответственно середины ребер SB и SA. Ясно, что $O_1D \perp SB$ и $O_2E \perp SA$. Поэтому $\triangle O_1SD = \triangle O_2SE$ и потому $SE = SD$, т. е. $SA = SB$.

Аналогично доказывается, что $SA = SC$. Итак, $SA = SB = SC$.

Но так как плоские углы при вершине S равны между собой, то равнобедренные треугольники SAB, SBC и SCA также равны между собой, и потому $AB = BC = CA$. Таким образом доказано, что пирамида $SABC$ правильная.

Докажем теперь, что центр Q данного шара лежит на высоте SO пирамиды $SABC$. Центр данного шара лежит в любой плоскости, перпендикулярной грани SBC и проходящей через точку O_1. Так как $\triangle SBC$ равнобедренный, то точка O_1 лежит на его высоте SF (рис. 11). Так как SF и медиана треугольника SBC, то AF — высота треугольника ABC.

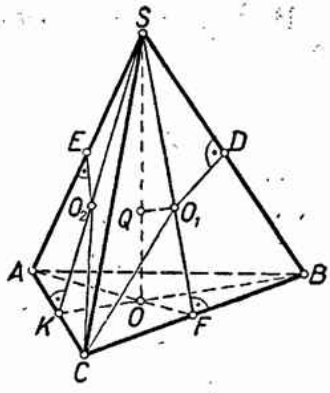


Рис. 11

Проведем теперь через прямую SF плоскость, перпендикулярную грани SBC. Так как эта плоскость перпендикулярна BC, то она пересечет плоскость ABC по прямой, перпендикулярной к прямой BC, т. е. по прямой AF. Таким образом, плоскость, проходящая через SF перпендикулярно грани SBC, есть плоскость ASF и центр Q данного шара лежит в этой плоскости.

Аналогично доказывается, что центр Q данного шара лежит в плоскости BKS. Но эти две плоскости ASF и BKS имеют две общие точки S и O, значит, они пересекаются по прямой SO (высота пирамиды $SABC$) и центр Q данного шара лежит на этой прямой.

Теперь из треугольника CSF находим:

$$SF = b\cos\frac{\alpha}{2}, \quad CF = b\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Далее:

$$CF = \frac{1}{2}BC, \quad BC = 2b\sin\frac{\alpha}{2}, \quad AF = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = b\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$OF = \frac{b}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника SO_1D находим:

$$SO_1 = \frac{SD}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь из подобия треугольников OSF и QO_1S находим:

$$\frac{SO_1}{O_1Q} = \frac{OS}{OF},$$

$$OS = \sqrt{SF^2 - OF^2} = \frac{b}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

и, значит,

$$O_1Q = r = \frac{b \cdot b\sqrt{3}\ \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 3 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}} = \frac{b}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}}}.$$

4. Пусть x и y — длины сторон прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда, а z — его высота. Тогда

$$xy = 2,$$
$$2(x + y)z = 18.$$

Сумма длин всех ребер равна

$$s = 4(x + y + z) = 4\left(x + y + \frac{9}{x + y}\right).$$

Выражение, заключенное в круглых скобках, имеет наименьшее значение при условии, что $x + y = 3$. Решая систему $x + y = 3$, $xy = 2$, получим $x = 2$, $y = 1$ (или наоборот). При этом $z = 3$. Минимальное значение суммы длин всех ребер параллелепипеда равно:

$$s = 4(1 + 2 + 3) = 24\ дм.$$

5. Получим здесь, как и выше в аналогичных задачах предыдущих вариантов, сначала *необходимое* условие. Заметим, что если (x, y) — решение данной системы, то $(-x, y)$ также решение данной системы. Поэтому если данная система имеет только одно решение, то это решение должно иметь вид $(0, y)$.

Полагая $x = 0$, приведем систему к виду:

$$y = 1 - a,\ y^2 = 1.$$

Отсюда или $a = 0$, или $a = 2$.

Итак, *необходимым* условием того, что данная система имеет только одно решение, является условие: или $a = 0$, или $a = 2$.

Исследуем, достаточно ли это условие.

1°. $a = 0$. Система принимает вид:

$$y = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|),$$
$$y^2 = 1 - x^2.$$

Из первого уравнения (и того, что $|x| = \sqrt{1 - y^2} \leqslant 1$) следует, что $y \geqslant 1$; из второго: $y \leqslant 1$, причем в обоих

уравнениях $y = 1$ только при $x = 0$. Таким образом, в случае $a = 0$ система имеет и притом только одно решение $(0, 1)$.

2°. $a = 2$. Данная система принимает вид:

$$y = 2^{|x|} - 2 + |x|\ (1 - |x|),$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ее решениями являются, например, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, т. е. при $a = 2$ система имеет более одного решения.

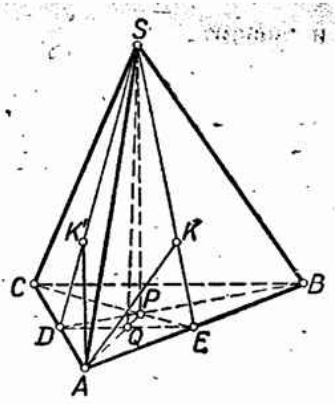


Рис. 12

Окончательно: чтобы данная система имела и притом только одно решение, *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось условие: $a = 0$.

Вариант 6

1. Ответ: Если скорости v_1 и v_2 лодок различны, то первой придет первая лодка в случае $\lambda = \frac{1472}{1485}\,\frac{v_2}{v_1} < 1$; в случае $\lambda > 1$ — вторая; в случае $\lambda = 1$ — одновременно.

2. Ответ: $\frac{1}{4} + k \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} + k$,

где k принимает все целые значения.

3. Пусть K и K' — точки пересечения биссектрис соответственно граней SAB и SAC (рис. 12). Так как $SK = SK'$, $AK = AK'$, то $\triangle SAK = \triangle SAK'$, следовательно,

$$\angle ASK = \angle ASK',\ \angle SAK = \angle SAK',$$

и потому

$$\angle ASB = \angle ASC,\ \angle SAB = \angle SAC.$$

Из последних равенств следует, что $\triangle SAB = \triangle SAC$ и, значит, $AB = AC$, $SB = SC$. Аналогично доказывается, что $AB = BC$ и $SA = SC$. Итак,

$$AB = BC = CA;\ SA = SB = SC,$$

т. е. пирамида $SABC$ правильная.

Пусть $AB = a$. Тогда

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$v = \frac{h}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 h}{4\sqrt{3}},\quad h = \frac{4\sqrt{3}\,v}{a^2}.$$

Далее,

$$DE = \frac{a}{2},\quad PE = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

и из треугольника SPE

$$SE^2 = SP^2 + PE^2 = \frac{48v^2}{a^4} + \frac{a^2}{12}.$$

Из треугольника SQE находим:

$$QE = SE \sin \frac{\alpha}{2},$$

и так как $QE = \frac{a}{4}$, то

$$\frac{a}{4} = \sqrt{\frac{48v^2}{a^4} + \frac{a^2}{12}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Решая это уравнение относительно a, найдем:

$$a = \sqrt[3]{\frac{48v \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} = 2 \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt[3]{\frac{6v}{\sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2}}}}.$$

Периметр основания

$$3a = 6 \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt[3]{\frac{6v}{\sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2}}}}.$$

4. Пусть длины сторон прямоугольника равны x и y. Тогда $x^2 + y^2 = 25$.

Вес листа фанеры вместе с весом проволоки, которой окантовано отверстие, равен

$$p = 2 \cdot 100 - 2xy + 2 \cdot 7 (x + y).$$

Из соотношения $x^2 + y^2 = 25$ или $(x + y)^2 - 2xy = 25$ находим:

$$2xy = (x + y)^2 - 25$$

и, значит,

$$p = 200 - (x + y)^2 + 25 + 14 (x + y) = 225 - \\ - [(x + y)^2 - 14 (x + y) + 49 - 49] = \\ = 274 - (x + y - 7)^2.$$

Отсюда ясно, что p будет иметь наибольшее значение, равное 274 граммам, если $x + y - 7 = 0$. Решая систему $x + y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$, найдем $x = 3$, $y = 4$ (или наоборот).

5. Система должна иметь решение, в частности, при $b = 0$. При $b = 0$ она принимает вид:

$$1 = a^2,$$
$$(a - 1) x^3 + y^3 = 1.$$

Отсюда или $a = 1$, или $a = -1$.

Итак, *необходимым* условием того, что данная система имеет хотя бы одно решение при любом действительном значении b, является условие: или $a = 1$, или $a = -1$. Исследуем достаточность этого условия.

1°. $a = 1$. Система принимает вид:

$$2^{bx} + 2by^2 = 1, \quad y^3 = 1.$$

Отсюда $y = 1$. Однако, например, при $b = 1$ первое уравнение системы решений не имеет.

2°. $a = -1$. Система принимает вид:

$$2^{bx} = 1,$$
$$-2x^3 + y^3 = 1.$$

При любом b она имеет решение $(0,1)$.

Итак, для того чтобы данная система имела хотя бы одно решение при любом значении b, *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось равенство $a = -1$.

§ 22. Физический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$(\lg^2 x - 3 \lg x + 1) \lg x > 3,$$

или

$$(\lg x - 3)(\lg^2 x + 1) > 0,$$

или

$$\lg x > 3,$$

откуда

$$x > 1000.$$

2. Пусть $z = x + iy$, где x и y—действительные числа. Тогда данное уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 - 2i(x + yi) + 2a + 2ai = 0;$$

отсюда

$$x^2 + y^2 + 2y + 2a = 0,$$
$$-2x + 2a = 0.$$

и, следовательно,

$$x = a,$$
$$y^2 + 2y + a^2 + 2a = 0.$$

Так как y — действительное число, то должно быть

$$\Delta = 1 - a^2 - 2a \geqslant 0,$$

$$a^2 + 2a - 1 \leqslant 0,$$
$$-1 - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2} - 1$$

Но по условию $a \geqslant 0$, следовательно,

$$0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2} - 1.$$

Итак, если $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2} - 1$, то $z = a + i(-1 \pm \sqrt{1 - 2a - a^2})$; при $a > \sqrt{2} - 1$ уравнение решений не имеет.

3. $\dfrac{2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x}{2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x} + 2 \operatorname{tg} x = 0,$

$$\frac{\sin 3x\,(2 \cos 2x + 1)}{\cos 3x\,(2 \cos 2x + 1)} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

Следствием этого уравнения является следующее уравнение:

$$\operatorname{tg} 3x + 2 \operatorname{tg} x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + 2 \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = k\pi \qquad (I)$$

и далее:

$$\frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + 2 = 0,$$

$$\frac{5 - 7 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{7},$$

$$x = k\pi \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{5}{7}}, \qquad (II)$$

где k принимает все целые значения. Формулами (I) и (II) даются все решения данного уравнения, так как при этих значениях x $\cos 2x \neq -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3}$.

4. Пусть $ABCD$ пока произвольный прямоугольник, вписанный в круговой сектор так, как это указано в условии задачи (рис. 13). Обозначим через OS биссектрису угла AOB (S — точка, лежащая на дуге сектора). Положим, $\angle AOS = x$ и выразим площадь s сектора через r, α и x. Пусть P и Q соответственно середины сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$. Имеем:

$$AP = r \sin x, \; AB = 2r \sin x.$$

Далее,

$$OQ = QD \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = AP \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \sin x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$PQ = OP - OQ = r \cos x - r \sin x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

и, значит,

$$s = 2r^2 \sin x \left(\cos x - \sin x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= r^2 \left(\sin 2x - 2\sin^2 x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= r^2 \left[\sin 2x - (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= r^2 \left(\sin 2x + \cos 2x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) =$$

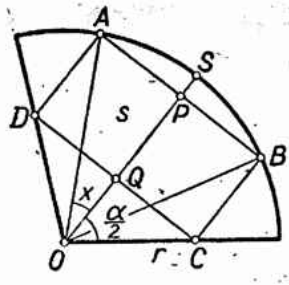


Рис. 13

$$= r^2 \left(\frac{\sin 2x \sin \frac{\alpha}{2} + \cos 2x \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{r^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos\left(2x - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos \frac{\alpha}{2}\right]. \qquad (1)$$

Из полученной формулы следует, что наибольшее значение s получает в том случае, если $\cos\left(2x - \frac{\alpha}{2}\right)$ обращается в 1, т. е. при $x = \frac{\alpha}{4}$. В таком случае

$$s_{\max} = \frac{r^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Итак, задача разрешима только в случае:

$$0 < s \leqslant r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Если $s > r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$, задача не имеет решения.

Построим график функции (1), считая x аргументом, а s функцией (r и α считаем фиксированными). Прежде всего заметим, что s обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = \frac{\alpha}{2}$, что ясно и геометрически.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$s = \frac{r^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos \frac{\alpha}{2}\right]. \qquad (2)$$

График функции (2) изображен на рисунке 14. На этом же рисунке 14 показано, как он строится: график функции $s = \cos 2x$

получается сжатием к оси Oy в два раза графика функции $s = \cos x$; график функции $s = \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)$ получается переносом графика функции $s = \cos 2x$ в положительном направлении оси Ox на величину, равную $\frac{\alpha}{4}$; график функции $s = \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}$ получается переносом графика функции $s = \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right)$ в отри-

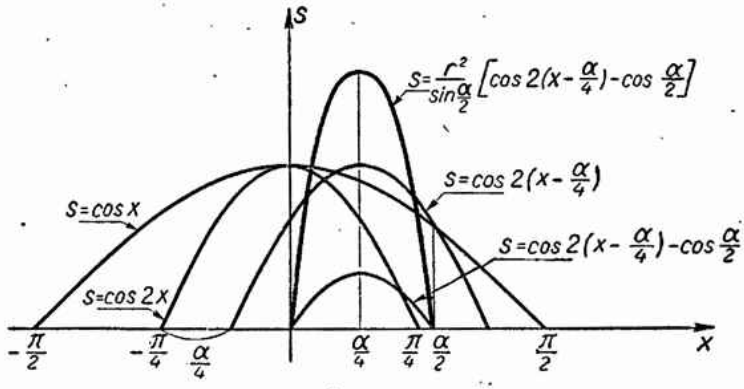


Рис. 14

цательном направлении оси Oy на величину $\cos\frac{\alpha}{2}$, и, наконец, график функции

$$s = \frac{r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right],$$

получается сжатием к оси Ox графика функции

$$s = \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos\frac{\alpha}{2},$$

причем коэффициент сжатия равен $\frac{r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (на рис. 14 коэффициент сжатия выбран большим единицы, поэтому лучше было бы говорить о растяжении от оси Ox; однако термин «сжатие» принят и в том случае, когда коэффициент сжатия больше 1). Таким образом, если $0 < s_0 < r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, то прямая $s = s_0$ пересекает график в двух точках; задача имеет два решения. Если $s_0 = r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, то одно; при этом $\left(x = \frac{\alpha}{4}\right)$ площадь s прямоугольника имеет наибольшее значение.

Если, наконец, $s > r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ — задача не имеет решения.

1°. Пусть $0 < s < r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$.

Тогда из уравнения (относительно x)

$$s = \frac{r^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos 2\left(x - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right] \tag{3}$$

находим два решения x_1 и x_2 относительно x; одно из них лежит в интервале $(0, \frac{\alpha}{4})$, другое— в интервале $(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{2})$:

$$0 < x_1 < \frac{\alpha}{4}, \quad \frac{\alpha}{4} < x_2 < \frac{\alpha}{2}.$$

Именно: из уравнения (3) находим:

$$\cos\left(2x - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Если $0 < x_1 < \frac{\alpha}{4}$, то, переписывая это уравнение в виде

$$\cos 2\left(\frac{\alpha}{4} - x\right) = \frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2},$$

находим:

$$x_1 = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right). \tag{5}$$

А для корня $\frac{\alpha}{4} < x_2 < \frac{\alpha}{2}$ из уравнения (4) находим:

$$x_2 = \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right). \tag{6}$$

Теперь, полагая $AB = a$, $AD = b$, находим:

$$a_1 = 2r \sin x_1 = 2r \sin \left[\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right] =$$

$$= 2r \sin \frac{\alpha}{4} \cos \left[\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right] -$$

$$-2r\cos\frac{\alpha}{4}\sin\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=2r\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}\right)}-$$

$$-2r\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}\right)}=$$

$$=2r\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}+\frac{s}{r^2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}-$$

$$-2r\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}-\frac{s}{r^2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-\sqrt{1-\frac{s\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right). \qquad (7)$$

Сторону $AD = b_1$ найдем, например, из соотношения

$$b_1=\frac{s}{a_1}=\frac{s}{r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-\sqrt{1-\frac{s\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right)}.$$

Уничтожая иррациональность в знаменателе, получим:

$$b_1=\frac{r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}+\sqrt{1-\frac{s\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right). \qquad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) легко проверить, что $a_1 b_1 = s$.
Для значения x_2 такого, что

$$\frac{\alpha}{4}<x_2<\frac{\alpha}{2},$$

из соотношения (4) сразу находим:

$$x_2=\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

и далее аналогичными выкладками получим:

$$a_2 = r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}+\sqrt{1-\frac{s\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right),$$

$$b_2 = \frac{r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-\sqrt{1-\frac{s\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right).$$

2°. Если $s = r^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, то имеем одно решение, соответствующее наибольшему значению s:

$$a = 2r\sin\frac{\alpha}{4},\quad b = \frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{4}}.$$

5. $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, $O'S : SO = \frac{1}{3}$ (рис. 15). Проведем через точку S прямые FE и GH, соответственно параллельные

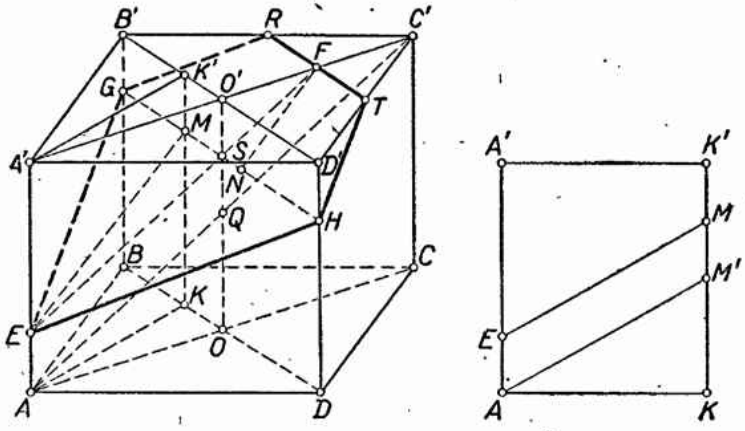


Рис. 15

прямым AC' и BD (точка F лежит на диагонали $A'C'$, точка E — на ребре AA', точки G и H лежат соответственно на ребрах BB' и DD'). Секущая плоскость — это плоскость, проходящая через прямые EF и GH; она пересекает грань $A'B'C'D'$ по отрезку $RT \parallel B'D'$. Искомое сечение — пятиугольник $EGRTH$.
Требуется найти его площадь. Имеем:

$$GH = B'D' = BD = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$OO' = c,\quad SO' = \frac{c}{4},\quad O'Q = QO = \frac{c}{2},$$

$$SQ = O'Q - O'S = \frac{c}{4}, \quad O'S = SQ = AE.$$

Далее, $FO' = FC'$ (так как $FS \parallel QC'$ и $O'S = SQ$);

$$RT = \frac{1}{2} B'D' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Проведем через ребро AA' плоскость P, перпендикулярную плоскости $B'D'DB$, и пусть эта плоскость пересечет BD, GH и $B'D'$ соответственно в точках K, M и K'. Имеем:

$$AK = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad K'M = \frac{1}{4} K'K = \frac{c}{4}, \quad AM' \parallel EM,$$

$$MM' = AE = \frac{1}{4} AA' = \frac{c}{4}, \quad KM' = KK' - K'M - MM' = \frac{c}{2},$$

$$EM = AM' = \sqrt{AK^2 + KM'^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) c^2 + 4a^2b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Заметим, что $ES = AQ$, $FS = \frac{1}{2} QC'$ (как средняя линия треугольника $QO'C'$), $FS = \frac{1}{2} ES$.

Из подобия треугольников EMS и FNS ($FN \perp GH$) находим:

$$FN = \frac{1}{2} EM = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) c^2 + 4a^2b^2}}{4\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Теперь находим площадь σ сечения, как сумму площадей треугольника EGH и трапеции $GRTH$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) c^2 + 4a^2b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \right) \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) c^2 + 4a^2b^2}}{4\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{7}{16} \sqrt{(a^2 + b^2) c^2 + 4a^2b^2}.$$

Вариант 2

1. Из данного уравнения находим: $12^{|x|} = 1 \pm \sqrt{1 - a}$. Корни действительны тогда и только тогда, когда $a \leqslant 1$. Но так как $12^{|x|} \geqslant 1$, то при условии $a \leqslant 1$ решение даст только уравнение

$$12^{|x|} = 1 + \sqrt{1 - a}, \quad a \leqslant 1,$$

откуда

$$x = \pm \log_{12} (1 + \sqrt{1 - a}).$$

2. Положим $z = x + iy$, где x и y — действительные числа. Данное уравнение примет вид:

$$x + yi + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + i = 0,$$

откуда

$$y + 1 = 0,$$

$$x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 0.$$

Из этой системы находим $y = -1$ и, далее,

$$x + a\sqrt{(x+1)^2 + 1} = 0.$$

Так как $a \geqslant 1$, то корнями этого уравнения могут быть только отрицательные значения x.

Имеем:

$$a\sqrt{(x+1)^2 + 1} = -x;$$

$$a^2(x^2 + 2x + 2) = x^2, \quad x < 0;$$
$$(a^2 - 1)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0, \quad x < 0.$$

Если $a = 1$, то $x = -1$ и $z = -1 - i$.

Если $a > 1$, то корни последнего уравнения будут действительны тогда и только тогда, когда

$$\Delta = a^4 - 2a^2(a^2 - 1) = a^2(2 - a^2) \geqslant 0,$$

откуда $(a > 1)$

$$1 < a \leqslant \sqrt{2}.$$

При этом

$$x = \frac{-a^2 \pm a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1}$$

и

$$z = \frac{-a^2 \pm a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - i.$$

Если $a > \sqrt{2}$, то данное уравнение не имеет решений.

3. Область определения функции $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ такова: $\sin x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 0$, т. е.

$$2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

При $x = 2k\pi$ и при $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ сумма $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ обращается в 1. Если же

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

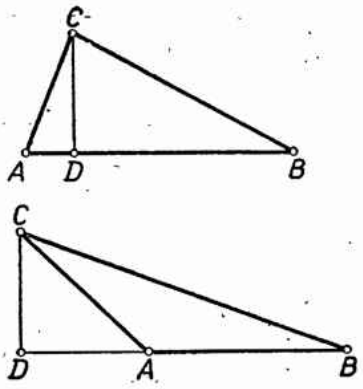


Рис. 16

то

$$\sqrt{\sin x} > \sin^2 x,$$

$$\sqrt{\cos x} > \cos^2 x$$

и, значит,

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

Итак, все решения данного неравенства состоят из бесконечного множества интервалов:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

где k принимает все целые значения.

4. *Предположим*, что *существует* треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи. Так как разность $BC - AC$ равна высоте треугольника (опущенной из вершины C на сторону AB), то $BC > AC$ и, следовательно, $A > B$ (в треугольнике против большей стороны лежит больший угол). Из соотношения

$$A - B = \varphi$$

теперь следует, что

$$0 < \varphi < \pi.$$

Пусть D — проекция вершины C на прямую AB. Тогда (рис. 16) имеем:

$$CD = a \sin B = a - b,$$

$$CD = b \sin A = b \sin (B + \varphi).$$

Из этих соотношений находим:

$$\frac{b}{a} = 1 - \sin B, \qquad \frac{a}{b} = 1 + \sin (B + \varphi)$$

и, следовательно,

$$(1 - \sin B)\,[1 + \sin (B + \varphi)] = 1,$$

или

$$\sin (B + \varphi) - \sin B = \sin B \sin (B + \varphi),$$

или

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos\left(B + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\,[\cos \varphi - \cos (2B + \varphi)] =$$

$$= \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2\left(B + \frac{\varphi}{2}\right),$$

или

$$\cos^2\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)-\cos^2\frac{\varphi}{2}=0.$$

Так как $0<\varphi<\pi$, то из двух корней $-\sin\frac{\varphi}{2}\pm 1$ следует взять только

$$\cos\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)=1-\sin\frac{\varphi}{2}.$$

В таком случае:

$$\begin{aligned} B &= \arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{\varphi}{2},\\ A &= \arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{\varphi}{2}, \qquad (1)\\ C &= \pi-2\arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, *если* существует треугольник, удовлетворяющий условию задачи, *то* его углы выражаются соотношениями (1), причем $0<\varphi<\pi$.

Докажем, что и *обратно*: если $0<\varphi<\pi$, то соотношениями (1) заданы углы некоторого треугольника ABC, причем этот треугольник удовлетворяет условию задачи.

Прежде всего, если $0<\varphi<\pi$, то $0<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$ и, значит, $0<1-\sin\frac{\varphi}{2}<1$. Отсюда следует, что

$$0<\arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)<\frac{\pi}{2}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} C &= \pi-2\arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)>0,\\ A &= \arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{\varphi}{2}>0, \end{aligned}$$

а, кроме того, из соотношений (1) следует, что $A+B+C=\pi$.

Докажем, что $B>0$, т. е. что

$$\arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)>\frac{\varphi}{2}, \qquad (2)$$

или

$$\cos\left[\arccos\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]<\cos\frac{\varphi}{2},$$

или

$$1-\sin\frac{\varphi}{2}<\cos\frac{\varphi}{2},$$

или

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}>1. \qquad (3)$$

При условии $0 < \varphi < \pi$ это соотношение верно, а так как из неравенства (3) следует и неравенство (2), то и оно верно.

Итак, $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $A + B + C = \pi$, следовательно, существует треугольник ABC, углы которого выражаются соотношениями (1). Докажем, что этот треугольник удовлетворяет условию задачи.

Для этого заметим, что

$$CD = h = a \sin B,$$
$$CD = h = b \sin A$$

и, значит,

$$\frac{h}{a} = \sin B,$$
$$\frac{h}{b} = \sin A.$$

Отсюда

$$\frac{a-b}{h} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A \sin B} =$$
$$= \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]} =$$
$$= \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\cos^2 \frac{A-B}{2} - \cos^2 \frac{A+B}{2}} =$$
$$= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} = 1,$$

следовательно,

$$a - b = h.$$

5. Пусть A и B — середины двух несмежных и непараллельных сторон правильного шестиугольника, лежащего в основании пирамиды. Пусть MN — прямая, лежащая в плоскости основания, проходящая через центр O основания (правильный шестиугольник) и перпендикулярная к AB. Обозначим через K середину высоты SO. Секущая плоскость пересекает SN в точке P, в которой прямая LK пересекает прямую SN (L — середина AB).

Проведя через точку K и P прямые, параллельные AB, до пересечения с боковыми ребрами соответственно в точках C, D, E, F,

построим сечение $ACEFDB$. Оно состоит из двух трапеций (рис. 17). Имеем:

$$AB = \frac{3a}{2}, \quad CD = a;$$

$\triangle OKL \sim \triangle KPQ = \triangle SPQ \sim \triangle OMS$ (Q — проекция P на SO);

$$OK = \frac{h}{2}, \quad SQ = KQ = \frac{h}{4}.$$

Если $SN = l$ (апофема), то $SP = \frac{l}{4}$, значит, $EF = \frac{a}{4}$.

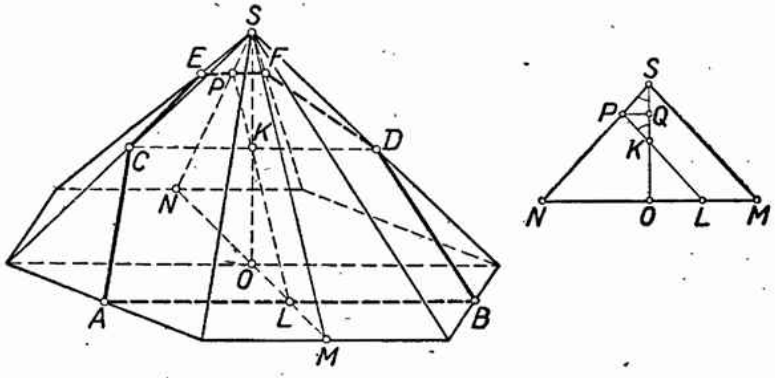


Рис. 17

Теперь находим площадь σ сечения как сумму площадей трапеций $ACDB$ и $CEFD$:

$$\sigma = \frac{l}{2}\,\frac{\frac{3a}{2}+a}{2} + \frac{l}{4}\,\frac{a+\frac{a}{4}}{2} = \frac{25}{32}\,al.$$

Апофему l найдем из треугольника SOM:

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}.$$

Итак,

$$\sigma = \frac{25}{64}\,a\sqrt{4h^2 + 3a^2}.$$

Вариант 3

1. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{\log_2 x}\,\frac{1}{1+\log_2 x}\,(2 + \log_2 x) - 1 > 0$$

или

$$\frac{(\sqrt{2} - \log_2 x)(\sqrt{2} + \log_2 x)}{\log_2 x\,(1 + \log_2 x)} > 0.$$

Все решения этого неравенства:

$$-\sqrt{2} < \log_2 x < -1,$$
$$0 < \log_2 x < \sqrt{2},$$

т. е.

$$2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}\ ,\ 1 < x < 2^{\sqrt{2}}.$$

2. Находим дискриминант:

$$\Delta = a^2 + a^2 - 2 = 2(a^2 - 1);$$

$\Delta \geqslant 0$ при условии, что $|a| \geqslant 1$.

1°. Если $a \geqslant 1$, то корни уравнения

$$y^2 - 2ay - a^2 + 2 = 0 \qquad (1)$$

действительны. Решения данного уравнения дадут только неположительные корни этого уравнения. Сумма корней уравнения (1) равна $2a > 0$, а их произведение равно $2 - a^2$; поэтому в случае $2 - a^2 > 0$ оба корня положительны, а в случае $2 - a^2 \leqslant 0$, т. е. $a \geqslant \sqrt{2}$, один из корней уравнения (1) положителен, а другой — не положителен. Значит, в случае $a \geqslant \sqrt{2}$

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}}$$

где k принимает все целые значения.

2°. Если $a \leqslant -1$, то корни уравнения (1) действительны.

Их сумма равна $2a < 0$, а произведение равно $2 - a^2$.

Если $2 - a^2 \geqslant 0$, т. е. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$, то оба корня неположительны и, значит,

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}},$$

где k принимает все целые значения.

Если же $2 - a^2 < 0$, т. е. $a < -\sqrt{2}$, то корни уравнения (1) разных знаков и потому

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}},$$

где k принимает все целые значения.

Итак: 1°. Если или $a < -\sqrt{2}$, или $a \geqslant \sqrt{2}$, то

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}}.$$

2°. Если $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$, то

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}}.$$

3°. Если $-1 < a < \sqrt{2}$, то решений нет.

3. В силу условия задачи: $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta$.

Так как $\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$, то

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma - 1} = \frac{2\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma - 1}.$$

Но $\operatorname{ctg}\beta > 0$, поэтому

$$1 = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma - 1},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma = 3.$$

4. *Предположим, что задача имеет решение* и C — окружность, удовлетворяющая условию задачи. Пусть S — ее центр, x — радиус, PQ и P_1Q_1 — хорды длиной $2a$, которые она отсекает на сторонах OA и OB данного угла (рис. 18). Обозначим через K и R

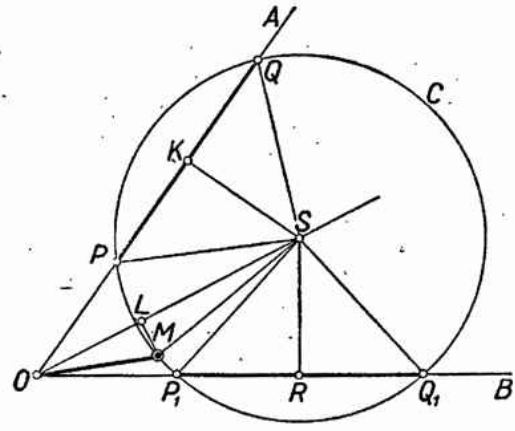


Рис. 18

прямоугольные проекции точки S соответственно на стороны OA и OB. Тогда

$$\angle SOB = \angle SOA = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Предположим, что $\alpha > \beta$ (в случае $\alpha \leqslant \beta$ окончательный результат не изменится; не изменяются по существу и приведенные ниже рассуждения).

Обозначим через L прямоугольную проекцию точки M на луч OS.

Имеем:

$$\angle MOL = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Очевидно, $SP > PK$ и так как $SP = x$, $PK = a$, то $x > a$. С другой стороны, $OL < OM = a$, значит, $OL < x$. Отсюда следует, что точка L лежит *между* точками O и S, а потому

$$OL + LS = OS. \tag{1}$$

Так как

$$SM = x,\ ML = a \sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

то

$$LS = \sqrt{x^2 - a^2 \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Далее,

$$OS = \frac{SK}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Теперь из соотношения (1) следует:

$$\sqrt{x^2 - a^2 \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} - a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{2}$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства и сокращая обе части полученного уравнения на $\sqrt{x^2-a^2} \neq 0$ $(x > a)$, будем иметь:

$$\sqrt{x^2-a^2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Отсюда

$$x = a\sqrt{1 + \frac{4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}}. \tag{3}$$

Заметим, что

$$OS = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{4}$$

Итак, *если* задача имеет решение, то центр окружности C лежит на биссектрисе OS угла AOB на расстоянии OS от вершины угла, определенном формулой (4), а длина ее радиуса равна числу x, определяемому соотношением (3):

$$x = a\sqrt{1 + \frac{4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}},$$

$$OS = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Докажем, что и обратно: такая окружность C^* действительно проходит через точку M и отсекает от сторон данного угла хорды PQ и P_1Q_1, длина каждой из которых равна $2a$. Имеем:

$$SM^2 = OS^2 + OM^2 - 2OS \cdot OM \cos \angle SOM$$

или

$$SM^2 = \frac{4a^2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}} + a^2 - 2\frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} a\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= a^2 + \frac{4a^2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

откуда

$$SM = x,$$

а это означает, что окружность C^* проходит через точку M.

Докажем теперь, что окружность C^* пересекает стороны данного угла. Пусть K — проекция точки S на сторону OA данного угла; тогда

$$SK = OS\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} < x.$$

Кроме того, $OS > x$ и, значит, окружность C^* пересекает *стороны* данного угла. Пусть P и Q — точки пересечения луча OA с окружностью C^*.

Имеем:

$$KQ = \sqrt{SQ^2 - SK^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}} = a$$

и, значит, $PQ = 2a$.

5. Пусть $ABCD$ — квадрат, лежащий в основании правильной пирамиды с вершиной E. Если K — середина ребра BE, то по условию задачи пл. $ACK = s$.

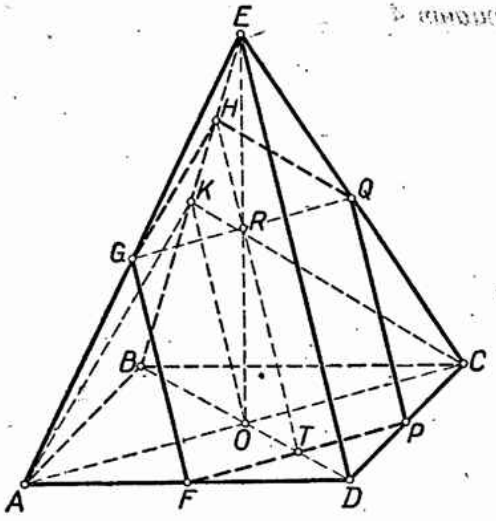


Рис. 19

Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Обозначим через F и P середины ребер AD и DC и проведем через FP и середину R высоты EO плоскость. Эта плоскость пересечет ребро BE в точке H, в которой BE пересекает TR (рис. 19, T — середина FP), а грани EAD и EDC — по отрезкам FG и PQ, параллельным ребру DE. Пятиугольник $GHQPF$ и есть сечение, площадь которого надо найти.

Положим

$$AD = DC = CB = AB = a,$$
$$KO = h.$$

Тогда

$$AC = a\sqrt{2}, \quad s = \frac{ah}{\sqrt{2}}, \quad FP = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}},$$
$$GQ = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Далее, $HR \perp GQ$ по теореме о трех перпендикулярах. Таким образом, HR — высота треугольника GHQ, а TR — высота прямоугольника $GQPF$. Искомая площадь σ равна сумме площади треугольника GHQ и площади прямоугольника $GQPF$, т. е.

$$\sigma = \frac{1}{2}HR \cdot GQ + RT \cdot GQ = GQ\left(\frac{1}{2}HR + RT\right) =$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}HR + RT\right).$$

Теперь находим:

$DE = 2KO = 2h$ (так как KO — средняя линия треугольника BED),

$RT = \frac{1}{2}DE = h$ (как средняя линия треугольника OED),

$HR = \frac{1}{2}KO = \frac{h}{2}$ (как средняя линия треугольника KEO).

Итак,

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} + h\right) = \frac{ah}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}s.$$

Вариант 4

1. Неравенство

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1$$

эквивалентно системе двух неравенств:

$$x > 1, \quad \frac{2x-1}{x-1} > x \tag{1}$$

и

$$0 < x < 1, \quad 0 < \frac{2x-1}{x-1} < x. \tag{2}$$

Все решения системы (1):

$$1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Все решения системы (2):

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

2. Полагая $3^{-|x-2|} = y$, заключаем, что $0 < y \leqslant 1$. Данное уравнение принимает вид:

$$y^2 - 4y - a = 0.$$

Его корни:

$$y = 2 \pm \sqrt{4+a}.$$

Корни действительны тогда и только тогда, когда $a \geqslant -4$. При этом условии $y = 2 + \sqrt{4+a} > 1$ и, значит, решение дает только корень

$$y = 2 - \sqrt{4+a}$$

и только при условии, что $0 < y \leqslant 1$. Решая неравенства

$$0 < 2 - \sqrt{4+a} \leqslant 1,$$

получим: $-3 \leqslant a < 0$. Итак, если $-3 \leqslant a < 0$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x = 2 \pm \log_3 (2 - \sqrt{4+a}).$$

Если $a < -3$ или $a \geqslant 0$ — уравнение корней не имеет.

3. Так как $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $y \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, $z \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ (в уравнения системы входят $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$) и $\cos(x+y+z) = -1 \neq 0$, то для любого решения x, y, z системы имеет место формула:

$$\operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x}.$$

В силу условия $x + y + z = \pi$ имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y + z) = 0$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z.$$

Используя первые два уравнения системы, отсюда получим:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 3 \operatorname{tg} y,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 6 \operatorname{tg} x,$$

или

$$\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 0,$$
$$5 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} z = 3 \operatorname{tg} x,$$

а теперь из уравнения

$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6$$

находим:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1.$$

Таким образом,

1°. $\operatorname{tg} x = 1$, тогда $\operatorname{tg} y = 2$,

$$\left.\begin{aligned} x &= k\pi + \frac{\pi}{4}, \\ y &= m\pi + \operatorname{arctg} 2, \\ z &= \frac{3\pi}{4} - (k + m)\pi - \operatorname{arctg} 2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где k и m принимают все целые значения.

Так как эти значения для x, y, z получены как *следствие* из уравнений данной системы, то необходимо проверить, выполняются ли все уравнения системы. Из соотношений (1) следует, что $x + y + z = \pi$ и, далее, $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} y = 2$, $\operatorname{tg} z =$

$= \operatorname{tg}(\pi - x - y) = -\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -\dfrac{1+2}{1-2} = 3$, так что $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} z =$

$= 3$, $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6$.

2°. $\operatorname{tg} x = -1$. В таком случае $\operatorname{tg} y = -2$ и

$$\left.\begin{aligned} x &= k\pi - \frac{\pi}{4}, \\ y &= m\pi - \operatorname{arc\,tg} 2, \\ z &= \frac{5\pi}{4} - (k + m)\pi + \operatorname{arctg} 2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где k и m принимают все целые значения. Проверкой убеждаемся, что формулами (2) при любых целых k и m даются решения данной системы.

4. Эта задача наиболее простая из всех задач по планиметрии, предлагавшихся в 1966 году на физическом факультете. Это и естественно: в ней требовалось доказать *только необходимость* признака параллельности прямой, соединяющей точку пересечения медиан треугольника с центром вписанной в него окружности.

Пусть $AB = a$, $BC = a + d$, $CA = a + 2d$.

Тогда радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, через его площадь s выражается соотношением:

$$r = \frac{2s}{3(a+d)}.$$

Расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABC до стороны BC равно $\frac{1}{3}AH$, где H — проекция вершины A треугольника на его сторону BC. Так как

$$s = \frac{1}{2}BC \cdot AH,$$

то

$$\frac{1}{3}AH = \frac{2s}{3BC} = \frac{2s}{3(a+d)}.$$

5. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, лежащий в основании правильной шестиугольной пирамиды с вершиной S.

Пусть O — центр основания, SP и SQ — апофемы граней SAF и SCD. Для построения сечения проведем через середину R высоты SO прямую, параллельную апофеме SP. Пусть эта прямая пересечет PQ и SQ в точках G (середина OP) и H.

Через точки G, R и H проведем прямые, параллельные AF, и точки их пересечения соответственно с ребрами AB и FE, SB и SE, SC и SD обозначим через K и L, M и N, M_1 и N_1. Шестиугольник $KLNN_1M_1M$ и есть искомое сечение (рис. 20). Этот шестиугольник состоит их двух трапеций $KMNL$ и MM_1N_1N.

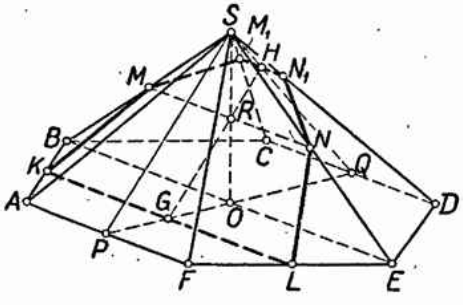


Рис. 20

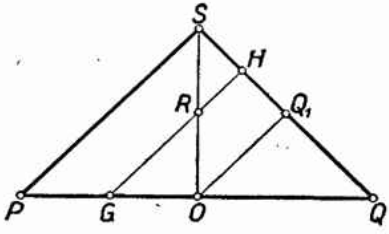


Рис. 21

Их высоты — соответственно GR и RH. Проведем $OQ_1 \parallel PS$ (рис. 21). Положим $AB=a$, $SQ=h$. Тогда $OQ_1 = \frac{h}{2}$ (как средняя линия $\triangle PSQ$); $RG = \frac{h}{2}$ (как средняя линия $\triangle PSO$), $SQ_1 = Q_1Q = \frac{h}{2}$, $RH = \frac{1}{2} OQ_1 = \frac{h}{4}$ (как средняя линия треугольника OSQ_1), $SH = HQ_1 = \frac{h}{4}$.

Далее,

$$BE = 2a,\ KL = \frac{1}{2}(AF + BE) = \frac{3a}{2}.$$

Из подобных треугольников MSN и BSE находим:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{SR}{SO},\ \text{откуда}\ MN = a.$$

Из подобных треугольников M_1SN_1 и CSD находим:

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \frac{SH}{SQ},\ \text{откуда}\ M_1N_1 = \frac{a}{4}.$$

Итак, искомая площадь

$$\sigma = \text{пл. трапеции } KMNL + \text{пл. трапеции } MM_1N_1N =$$

$$= \frac{1}{2} GR(KL + MN) + \frac{1}{2} RH(MN + M_1N_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2}\left(\frac{3a}{2} + a\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{4}\left(a + \frac{a}{4}\right) = \frac{25}{32} ah.$$

Окончательно:

$$\sigma = \frac{25}{16} s.$$

Вариант 5

1. Данное неравенство выполняется в двух случаях:

$$1^\circ.\ 2x^2 - 7x + 6 > 1,\ \frac{x}{3} > 1 \text{ и } 2^\circ.\ 0 < 2x^2 - 7x + 6 < 1,$$

$$0 < \frac{x}{3} < 1.$$

В случае 1° решение системы неравенств приводит к неравенству $x > 3$. В случае 2° — к неравенствам $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$.

2. $|z| + a$ есть число действительное, значит, для того чтобы выполнялось равенство $z|z| + az + i = 0$ или $z(|z| + a) + i = 0$ число z должно быть чисто мнимым. Пусть $z = yi$. Тогда получим

$$y|y| + ay + 1 = 0. \qquad (1)$$

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 + ay + 1 = 0$, но так как $a \geqslant 0$, то $y^2 + ay + 1 > 0$. Значит, должно быть выполнено неравенство $y < 0$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$-y^2 + ay + 1 = 0,$$
$$y^2 - ay - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения действительны и разных знаков. Следует взять только отрицательный корень:

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Ответ:

$$z = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} i.$$

3. Из уравнения

$$\cos(x - y - z) = \frac{1}{2}$$

находим:

$$x - y - z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

где k принимает все целые значения.

1°. $$x - y - z = 2k\pi + \frac{\pi}{3},$$
$$x + y + z = \pi.$$

Отсюда

$$x = k\pi + \frac{2\pi}{3}, \tag{1}$$

$$y + z = -k\pi + \frac{\pi}{3}. \tag{2}$$

2°. $$x - y - z = 2k\pi - \frac{\pi}{3},$$
$$x + y + z = \pi.$$

Отсюда

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \tag{3}$$

$$y + z = -k\pi + \frac{2\pi}{3}. \tag{4}$$

Уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} - \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 0$$

после замены $z = \pi - (x + y)$ примет вид:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = 0, \tag{5}$$

и, значит, для любого решения x, y, z данной системы аргументы $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ и $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$ входят в область определения функции $\operatorname{tg}\alpha$, а, значит, для $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$ можно применить формулу:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}}.$$

Уравнение (5) принимает вид:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=0.$$

Таким образом, либо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=0$, либо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=0$.

Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=0$, то, замечая, что $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\neq 0$ (см. формулы (1) и (3)), получим: $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=0$;

и мы приходим к следующим системам решений:

$$\left.\begin{aligned} x&=k\pi+\frac{2\pi}{3},\\ y&=2n\pi,\\ z&=-k\pi-2n\pi+\frac{\pi}{3};\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=k\pi+\frac{\pi}{3},\\ y&=2n\pi,\\ z&=-k\pi-2n\pi+\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Необходимо проверить, что при любых целых k и n значения x, y, z, заданные формулами (I) и (II), удовлетворяют всем уравнениям данной системы (проверка предоставляется читателю).

Остается рассмотреть случай $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=0$. Отсюда *следует*, что

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right),$$

$$\frac{y}{2}=n\pi-\frac{x}{2},$$

$$y=2n\pi-x,$$

и мы приходим еще к двум системам решений:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\pi + \frac{2\pi}{3}, \\ y &= 2n\pi - k\pi - \frac{2\pi}{3}, \\ z &= -2n\pi + \pi; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= k\pi + \frac{\pi}{3}, \\ y &= 2n\pi - k\pi - \frac{\pi}{3}, \\ z &= -2n\pi + \pi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

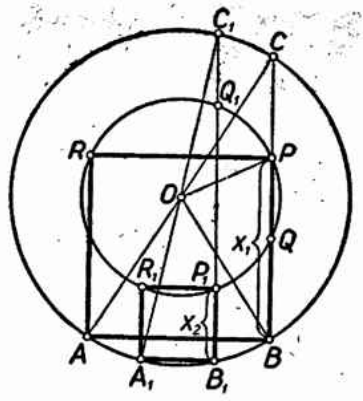


Рис. 22

Проверка того, что формулами (III) и (IV) даются решения системы при любых целых k и n, предоставляется читателю.

4. Предположим, что задача имеет решение (рис. 22). Пусть BP — сторона квадрата, о котором говорится в условии задачи, (точка P лежит на меньшей окружности, а точка B — на большей). Обозначим через Q вторую точку пересечения прямой BP с меньшей окружностью. Произведение

$$BP \cdot BQ$$

равно квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки B к меньшей окружности. С другой стороны, длина отрезка этой касательной равна $\sqrt{R^2 - r^2}$ и, следовательно,

$$BP \cdot BQ = R^2 - r^2.$$

Обозначим через C вторую точку пересечения прямой BP с большей окружностью. Полагая $BP = x$, находим: $BQ = BC - x$ и, следовательно,

$$x\,(BC - x) = R^2 - r^2,$$

откуда

$$BC = \frac{x^2 + R^2 - r^2}{x}.$$

Пусть BA — сторона квадрата, перпендикулярная к BC; тогда AC — диаметр большей окружности и, следовательно,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

т. е.

$$x^2 + \frac{(x^2 + R^2 - r^2)^2}{x^2} = 4R^2.$$

Упрощая это уравнение, получим:

$$2x^4 - 2\,(R^2 + r^2)\,x^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0. \qquad \text{(1)}$$

Обозначая корни этого уравнения* (относительно x^2) через x_1^2 и x_2^2 и учитывая, что x_1 и x_2 — действительные положительные числа, будем иметь:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 + r^2,$$

$$x_1 x_2 = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда (считаем, что $x_1 \geqslant x_2$) имеем:

$$x_1 + x_2 = \sqrt{R^2 + r^2 + \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)},$$

$$x_1 - x_2 = \sqrt{R^2 + r^2 - \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)}$$

и, следовательно,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{R^2 + r^2 + \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)} + \sqrt{R^2 + r^2 - \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)}\right], \quad (2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{R^2 + r^2 + \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)} - \sqrt{R^2 + r^2 - \sqrt{2}\,(R^2 - r^2)}\right]. \quad (3)$$

Итак, *если задача имеет решение*, то $R^2 + r^2 - \sqrt{2}\,(R^2 - r^2) \geqslant 0$, или

$$r \geqslant (\sqrt{2} - 1)\,R.$$

При этом сторона квадрата выражается либо соотношением (2), либо соотношением (3), либо имеется два решения, определяемые соотношениями (2) и (3).

Наконец, если

$$r < (\sqrt{2} - 1)\,R, \quad (4)$$

то задача не имеет ни одного решения. Докажем, что и обратно:

1°. Если $r > (\sqrt{2} - 1)\,R$, то задача имеет два решения, причем стороны квадратов выражаются соотношениями (2) и (3).

2°. Если $r = (\sqrt{2} - 1)\,R$, то задача имеет одно решение, причем сторона квадрата выражается соотношением

$$x = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

В самом деле, пусть

$$r \geqslant (\sqrt{2} - 1)\,R.$$

---

* Здесь дается один из способов решения биквадратного уравнения, который удобно применить в ряде случаев, в частности при решении этой задачи.

Тогда x_1 и x_2, выражаемые формулами (2) и (3), — действительные числа. Будем обозначать x_1 и x_2 через x; x удовлетворяет уравнению (1). Это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{(x^2 + R^2 - r^2)^2}{x^2} + x^2 = 4R^2. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что $x < 2R$, т. е. существует хорда AB большей окружности, длина которой равна x. Проведем через точку B прямую, перпендикулярную AB; пусть C — вторая точка пересечения этого перпендикуляра с большей окружностью, тогда

$$BC^2 + x^2 = 4R^2. \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что

$$\frac{x^2 + R^2 - r^2}{x} = BC$$

или

$$x(BC - x) = R^2 - r^2.$$

Отсюда следует, что $x < BC$. Отложим от точки B в направлении от B к C отрезок BP, длина которого равна x.

В силу соотношения $x < BC$ точка P — внутренняя точка отрезка BC. Применяя к треугольнику OBC и к точке P теорему Стюарта* и учитывая, что P — внутренняя точка отрезка BC, будем иметь:

$$OP^2 \cdot BC = R^2 x + R^2 (BC - x) - xBC (BC - x)$$

или

$$OP^2 \cdot BC = BC \cdot R^2 - BC (R^2 - r^2),$$

откуда

$$OP = r$$

и, значит, точка P лежит на меньшей окружности. Таким образом, AB и BP — две взаимно перпендикулярные стороны квадрата, причем вершины A и B лежат на большей окружности, а P — на меньшей. Проведем через точку P прямую, параллельную AB. Если R — точка пересечения этой прямой с меньшей окружностью, то $ABPR$ — квадрат, удовлетворяющий условию задачи.

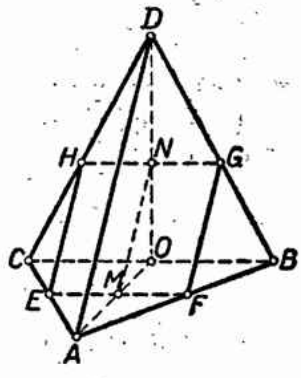


Рис. 23

5. Пусть в основании пирамиды $DABC$ лежит равносторонний треугольник ABC

* Можно обойтись и без теоремы Стюарта.

со стороной a, причем грань DBC является равнобедренным треугольником ($DC = DB$) и плоскости DBC и ABC взаимно перпендикулярны (рис. 23). Так как $DA \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), то плоскость, параллельная DA и BC, пересекающая пирамиду, пересечет ее по прямоугольнику $EHGF$($EH \parallel GF \parallel AD$, $HG \parallel EF \parallel CB$). Требуется найти площадь этого сечения при условии, что $EHGF$ — квадрат. Пусть $EF = x$. Тогда $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ (M — середина HG); $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$ (O — середина BC),

$$DO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},\quad DA = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

Из подобия треугольников OAD и OMN (N — середина EF)

$$\frac{DA}{MN} = \frac{OA}{OM},$$

$$\frac{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}{x} = \frac{a}{a - x};$$

отсюда

$$x = \frac{a\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}{a + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

и, значит, площадь сечения

$$\sigma = \frac{a^2(2b^2 + a^2)}{(a\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + a^2})^2}.$$

Вариант 6

1. Перепишем данное неравенство в виде:

$$2\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x > 0,$$

или

$$\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 < 0,$$

или

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x + 2) < 0.$$

Все решения данного неравенства находятся из неравенств

$$\operatorname{tg} x < -2, \qquad -1 < \operatorname{tg} x < 1,$$

т.е.

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<-\operatorname{arctg}2+k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

2. Если $a=0$, то уравнение принимает вид:

$$2|z|+1=0,$$

что не имеет места ни при одном значении z.

Пусть $a>0$. Полагая $z=x+yi$, где x и y — действительные числа, будем иметь:

$$2\sqrt{x^2+y^2}+1-4ax+ia(1-4y)=0$$

откуда

$$\left.\begin{array}{c}2\sqrt{x^2+y^2}+1-4ax=0,\\ 1-4y=0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

и, следовательно, $y=\frac{1}{4}$. Первое уравнение системы (1) принимает вид:

$$2\sqrt{x^2+\frac{1}{16}}=4ax-1. \qquad (2)$$

Это уравнение может иметь только корни, удовлетворяющие условию:

$$x>\frac{1}{4a}>0.$$

Таким образом, уравнение (2) эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\left.\begin{array}{c}4\left(x^2+\frac{1}{16}\right)=16a^2x^2-8ax+1,\\ x>\frac{1}{4a}>0\end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{c}4(4a^2-1)x^2-8ax+\frac{3}{4}=0,\\ x>\frac{1}{4a}>0.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Если $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{3}{16}<\frac{1}{2}$, а должно быть $x>\frac{1}{2}$; значит, при $a=\frac{1}{2}$ уравнение не имеет решений. Будем предполагать, что $a\neq\frac{1}{2}$.

Дискриминант уравнения (3) положителен:

$$\Delta = 16a^2 - 3(4a^2 - 1) = 4a^2 + 3.$$

Следовательно, корни уравнения (3) действительны и различны. Перепишем уравнение (3) в виде:

$$f(x) = x^2 - \frac{2a}{4a^2-1}x + \frac{3}{16(4a^2-1)} = 0.$$

1°. $0 < a < \frac{1}{2}$. Находим*:

$$f\left(\frac{1}{4a}\right) = \frac{1}{16a^2} - \frac{2a}{4a^2-1}\cdot\frac{1}{4a} + \frac{3}{16(4a^2-1)} = -\frac{a^2+1}{16a^2(4a^2-1)} > 0$$

и далее:

$$\left(2x - \frac{2a}{4a^2-1}\right)_{x=\frac{1}{4a}} = \frac{1}{2a} - \frac{2a}{4a^2-1} = -\frac{1}{2a(4a^2-1)} > 0;$$

оба корня меньше, чем $\frac{1}{4a}$, — решений нет.

2°. $a > \frac{1}{2}$. В этом случае $f\left(\frac{1}{4a}\right) < 0$, т. е. число $\frac{1}{4a}$ лежит между корнями уравнения (3). Поэтому корнем системы (3) является только больший корень:

$$x = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)}.$$

Итак, если $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, то данное уравнение не имеет корней;

Если $a > \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет только один корень

$$z = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} + \frac{i}{4}.$$

3. Если x, y — решение данной системы, то

$$x + y > 0,$$
$$x - y > 0;$$

так как $xy = 3$, то $x > 0$, $0 < y < x$. Далее, x и y положительны и $xy = 3$, значит, одно из чисел x или y больше 1, и, значит, $x + y > 1$, следовательно, $\log_2(x+y) > 0$.

Данную систему можно переписать так:

$$\log_2(x+y) + |\log_2(x-y)| = 3,$$
$$xy = 3.$$

1°. Если $x - y > 1$, то $\log_2(x^2 - y^2) = 3$, $xy = 3$, т. е.

---

* См. замечание на стр. 21, 22.

$$x^2 - y^2 = 8,$$
$$xy = 3, \qquad (1)$$

откуда

$$x_1 = 3,\ y_1 = 1$$

(других решений системы (1), для которых $x > 0$, $y > 0$, нет).

2^0. Если $0 < x - y < 1$, то данная система принимает вид:

$$\log_2 (x + y) - \log_2 (x - y) = 3,$$
$$xy = 3$$

или

$$\frac{x+y}{x-y} = 8,$$
$$xy = 3,$$

откуда

$$x_2 = 3\sqrt{\frac{3}{7}},\quad y_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Условия $x_2 > 0$, $0 < y_2 < x_2$, $0 < x_2 - y_2 < 1$ выполнены.

Итак, система имеет два решения:

$$(3,\ 1) \text{ и } \left(3\sqrt{\frac{3}{7}},\ \sqrt{\frac{7}{3}}\right).$$

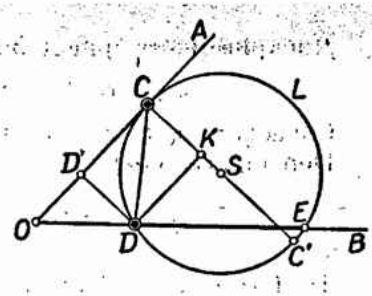


Рис. 24

4. Центр S искомой окружности должен лежать на прямой, проходящей через точку C перпендикулярно к OA, и на прямой, перпендикулярной к отрезку DC, проходящей через его середину.

Эти прямые пересекаются в одной точке S, и потому существует и притом только одна окружность, удовлетворяющая условию задачи (рис. 24). После этого рассуждения, в отличие от решения задач № 4 других вариантов (данных на физическом факультете в 1965 г.), достаточно провести лишь часть рассуждений, относящихся к вычислению радиуса окружности и длины хорды DE.

Здесь естественно избрать именно этот путь, так как *существование и единственность* окружности, о которой говорится в условии задачи, уже доказана (синтетически) и доказательство это весьма простое.

Итак, пусть L — окружность, удовлетворяющая условию задачи.

Пусть D' — прямоугольная проекция точки D на прямую OA, K — прямоугольная проекция точки D на прямую SC, а C' — точка, диаметрально противоположная точке C.

Тогда

$$CD^2 = CK \cdot CC' = DD' \cdot 2r = 2rb \sin\alpha,$$

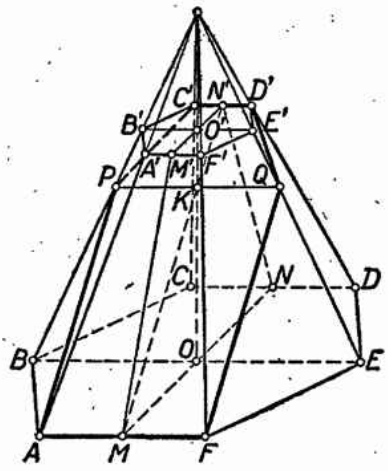


Рис. 25

и так как

$$CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

то

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}.$$

Для нахождения $x = DE$ предположим сначала, что $OD < OE$ (как на рис. 24). Тогда

$$b(b + x) = a^2,$$

откуда

$$x = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Если $OD > OE$ (точки D и E следует на рис. 24 поменять местами и соответственно изменить построение), то

$$b(b - x) = a^2,$$

откуда

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a}.$$

Итак, во всех случаях

$$x = \frac{|a^2 - b^2|}{a}.$$

5. Пусть MM' — апофема боковой грани данной пирамиды (рис. 25).

По условию $MN' = b$. Проведем сечение через середины M, N, M' и N' ребер AF, CD, $A'F'$ и $C'D'$ (рис. 26). Так как $MN = 3M'N'$, то прямая MN' точкой K делит высоту $O'O$ пирамиды в отношении $1 : 3$; $MK = \frac{3b}{4}$, $KN' = \frac{b}{4}$.

Из осевого сечения, проходящего через точки B и E, получим:

$$BE = 6a,\ B'E' = 2a,\ PQ = 3a.$$

Таким образом, $PQ = AF$ и четырехугольник $APQF$ является прямоугольником.

Площадь σ сечения $APC'D'QF$ (рис. 27) равна сумме площади этого прямоугольника и площади трапеции $PC'D'Q$:

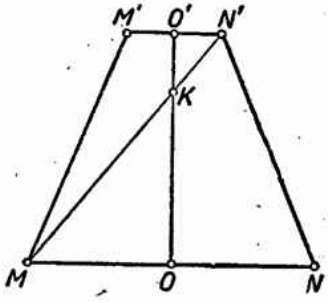


Рис. 26

$$\sigma = AP \cdot AF + N'K \frac{PQ + C'D'}{2} = 3a \cdot \frac{3b}{4} +$$

$$+ \frac{b}{4} \frac{a + 3a}{2} = \frac{11}{4} ab.$$

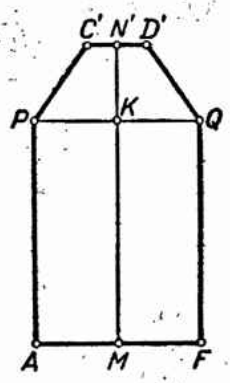


Рис. 27

§ 23. Химический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. $\frac{v}{v_1 v_2} [sv - t(v^2 - v_1 v_2)]$.
2. $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$.
3. $\frac{3\sqrt{2}}{4} a^2$.
4. $-3 < x < 1$, $3 < x < 4$.

Вариант 2

1. $\frac{5}{m} [m^2 (t - t_2) - (t - t_1)]$.
2. $\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2$.
3. $\frac{2\pi b^5}{3a(b - a)}$.
4. $1 < x < \frac{\sqrt{113} - 7}{2}$.

Вариант 3

1. $\frac{t}{2d^2} (s^2 - 4sd + 2d^2)$.
2. $\frac{\pi}{2} (2k + 1)$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$, $2k\pi$.
3. $a^2 \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$.
4. $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3}$, $-\frac{5}{2} < x < -2$.

Вариант 4

1. $m \frac{t_2 + (m - 1) t_1}{m^2 - m - 2}$.
2. $\frac{\pi}{12} (2k + 1)$, $\frac{k\pi}{4}$.

3. $\frac{\pi l^2}{3}$, $\frac{3l}{4\sqrt{2}}$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{4} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$.

§ 24. Геологический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. 300 *км*.
2. $4 \log_3 2$.
3. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.
4. 1,6 *см*^{2}.

Вариант 2

1. 3 *ч*, 6 *ч*, 2 *ч*.
2. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.
3. $\frac{k\pi}{3}$; $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.
4. 0,4.

Вариант 3

1. 12%, 24%, 48%.
2. $x = 2$.
3. $k\pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, $k\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
4. $\frac{150}{7}$ *см*^{2}.

Вариант 4

1. 60 *км/ч*, 80 *км/ч*.
2. $x = \frac{1}{6} \log_2^3 5$.
3. $k\pi$, $k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4}$.
4. $^{25}/_{16}$. Указание: треугольник PQR гомотетичен треугольнику KLM (пл. $\triangle KLM = 1/4$), причем центром гомотетии является точка пересечения медиан треугольника ABC, а коэффициент гомотетии равен $^5/_2$.

§ 25. Географический факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. 30 траншей.

2. $-1 < x < 0,\ 2 < x < 3.$

3. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha.$

4. $\frac{k\pi}{3},\ \frac{4k+1}{6}\pi.$

Вариант 2

1. 10 *ч*, 15 *ч*.

2. $-7 < x < 1.$

3. $\frac{1}{2}\sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha}}.$

4. $\frac{\pi}{4}(2k+1),\ \frac{\pi}{8}(4k+1).$

Вариант 3

1. 400 деталей.

2. $-3 \leqslant x < 1.$

3. $\frac{r}{R} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha.$

4. $\frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}.$

Вариант 4

1. 16 *км/ч*.

2. $-1 < x < 4.$

3. $-2s \cdot \cos^2\alpha \cos 2\alpha.$

4. $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}.$

§ 26. Биолого-почвенный факультет, 1966 г.

Вариант 1

1. 180 *км*.

2. $\frac{2k\pi}{5},\ \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{2\pi}{15}.$

3. $\frac{a^2 \sin\alpha\,|\cos 2\alpha|}{4\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}.$

4. $x < -1.$

Вариант 2

1. В 4 раза.

2. $k\pi + \frac{\pi}{4},\ \frac{k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}.$

3. $\frac{b^2 \sin\alpha(5\sin\beta + 3\cos\beta\operatorname{tg}\alpha)}{16\sin(\alpha+\beta)}.$

4. $2-\sqrt{3} < x < 1,\ 3 < x < 2+\sqrt{3}.$

Вариант 3

1. 36 *км/ч*.
2. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$.
3. $\frac{9}{2}\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \frac{7}{2}$.
4. $-\frac{10}{9} < x < -\frac{4}{5}$.

Вариант 4

1. В полтора раза.
2. $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$, $\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3$.
3. $\frac{c^2}{2} \cdot \frac{\cos^2\beta \sin 2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}$.
4. $-4 < x < -3$, $5 < x < 6$.

Вариант 5

1. 5 *г* и 20 *г*.
2. $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{5}$.
3. Основание: $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$; боковая сторона: $\frac{R^2}{\sqrt{Rr}}\frac{R+r}{R-r}$.
4. $x = 2$.

§ 27. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1966 г.

Вариант 1

1. Пусть x, y, z, u — соответственно количество «двоек», «троек» «четверок» и «пятерок». Тогда по условию задачи:

$$x + y + z + u = 30, \quad (1)$$
$$2x + 3y + 4z + 5u = 93, \quad (2)$$
$$u < y < z,$$

причем u делится на 2, а z — на 10. Очевидно, согласно условию, нельзя взять $z = 0$, так как при $z = 0$ условие $y < z$ не может быть выполнено. Далее, из уравнений (1) и (2) следует:

$$y + 2z + 3u = 33, \quad (3)$$

а отсюда следует, что $z \neq 20$. Таким образом, $z = 10$ — количество «четверок», полученных на экзамене, равно 10.

Теперь уравнение (3) принимает вид:

$$y = 13 - 3u.$$

Исходя из условия задачи, $u \neq 0$, так как если $u = 0$, то $y = 13 > z$, что противоречит условию. Так как u четное, то можно взять $u = 2$, тогда $y = 7$ (если же взять $u = 4$, то $y = 1 < u$, что противоречит условию задачи).

Итак, количество «троек», полученных на экзамене, равно 7, а количество «пятерок» равно 2. Таким образом, количество «двоек», полученных на экзамене, равно 11.

2. Следствием данного уравнения являются следующие уравнения:

$$\lg \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lg 4 \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

или

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = 4 \frac{\cos 2x}{\cos x},$$

$$2\cos^2 x = 4\cos 2x.$$

$$1 + \cos 2x = 4\cos 2x,$$

$$\cos 2x = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Общий наименьший положительный период функций $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$ равен 2π. Из соотношения (1) находим корни такие, что $0 \leqslant x < 2\pi$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}, \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}, \quad x_3 = 2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}.$$

Так как $\cos x_2 < 0$, $\sin x_3 < 0$, то x_2 и x_3 не корни данного уравнения; $\cos x_1 > 0$, $\sin x_1 > 0$,

$\cos 2x_1 > 0$, $\sin 2x_1 > 0$; x_1 — корень данного уравнения. Все корни: $x = 2k\pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}$,

где k принимает все целые значения.

3. Эта задача решена во введении (см. стр. 10—12).

4. Если плоскость проекции расположена так, что одна из вершин данного тетраэдра проектируется в точку, лежащую внутри или на границе треугольника, образованного проекциями трех других вершин данного тетраэдра, то площадь проекции не превосходит площади одной из граней тетраэдра, т. е. не превосходит величины $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — ребро данного тетраэдра. Если же проекции вершин данного тетраэдра образуют выпуклый четырехугольник P, то величина его площади (площадь проекции) равна:

$$s = \frac{1}{2} d d' \sin \alpha,$$

где d и d' — диагонали четырехугольника P, а α — угол между ними. Так как d и d' вместе с тем длины проекций двух скрещивающихся ребер тетраэдра, то s будет иметь максимальную величину, если эти скрещивающиеся ребра будут проектироваться в натуральную величину. В самом деле, в этом случае $\alpha = 90°$ и

$$s = \frac{a^2}{2},$$

где a — длина ребра тетраэдра. В этом случае плоскость проекции параллельна двум скрещивающимся ребрам данного тетраэдра. Остается заметить, что $\frac{1}{2}\, a^2 > \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Из данной системы следует, что

$$|z^3| = |-\bar{w}^7|,$$

$$|z^5| \cdot |w^{11}| = 1$$

или

$$|z|^3 = |w|^7,$$
$$|z|^5 \cdot |w|^{11} = 1.$$

Отсюда

$$|z| = |w|^{\frac{7}{3}}$$

и, значит,

$$|w|^{\frac{35}{3}} \cdot |w|^{11} = 1, \quad |w|^{\frac{68}{3}} = 1,$$

и так как $|w| \geqslant 0$, то из последнего соотношения следует, что

$$|w| = 1,$$

но тогда и

$$|z| = 1.$$

Таким образом, решениями данной системы могут быть только такие пары (z, w), для которых $|z| = |w| = 1$. Положим,

$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$
$$w = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Тогда из уравнений

$$z^3 = -\bar{w}^7,$$
$$z^5 \cdot w^{11} = 1$$

следует, что

$$\arg z^3 = \arg(-\bar{w}^7) + 2k\pi,$$
$$\arg z^5 + \arg(w^{11}) = 2s\pi,$$

где k и s — любые целые числа; или

$$3\varphi = \pi - 7\theta + 2k\pi,$$
$$5\varphi + 11\theta = 2s\pi,$$

или

$$3\varphi + 7\theta = (2k+1)\pi,$$
$$5\varphi + 11\theta = 2s\pi.$$

Отсюда

$$\varphi = -\frac{11}{2}\pi(2k+1) + 7s\pi,$$

$$\theta = \frac{5\pi}{2}(2k+1) - 3s\pi$$

и, значит, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\left[-\frac{11}{2}\pi(2k+1) + 7s\pi\right] +$

$$+ i\sin\left[-\frac{11}{2}\pi(2k+1) + 7s\pi\right] = \pm i.$$

Если $z = i$, то из данной системы находим:

$$-i + \bar{w}^7 = 0,$$
$$iw^{11} = 1$$

или

$$\bar{w}^7 = i,$$
$$w^{11} = -i,$$

откуда $w^4 = 1$, $w^2 = \pm 1$, $w = \pm 1$, $w = \pm i$; пары $z = i$, $w = \pm 1$ не образуют решения данной системы; $z = i$, $w = i$ — решение данной системы; $z = i$, $w = -i$ — не решение. Если $z = -i$, то $i + \bar{w}^7 = 0$, $-iw^{11} = 1$ или $\bar{w}^7 = -i$, $w^{11} = i$, откуда $w^{11}\bar{w}^7 = 1$, т. е. $w^4 = 1$, значит, $w^2 = \pm 1$, а $w = \pm 1$ или $w = \pm i$. Пары $z = -i$, $w = \pm 1$ не образуют решения; $z = -i$, $w = i$ также не решение; $z = -i$, $w = -i$ — решение. Итак, данная система имеет два решения: 1) $z = i$, $w = i$; 2) $z = -i$, $w = -i$.

Вариант 2

1. Так как сумма цен купленных изделий равна 21, то возможны лишь два случая:

1) были куплены только пирожки, бублики и коржики;

2) были куплены только бублики, булки и слойки.

Обозначая количество купленных изделий соответственно через x, y, z, u, v (в том порядке, как они перечислены в условии задачи), имеем:

$$\left.\begin{aligned} x + y + v &= 14, \\ 5x + 6y + 10v &= 100 \end{aligned}\right\} \quad (1) \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} y + z + u &= 14, \\ 6y + 7z + 8u &= 100. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Исследуем систему (1). Находим:

$$y = 30 - 5v.$$

Так как количество купленных изделий каждого наименования куплено не более чем 7, то для v возможно только одно значение: $v = 5$, но тогда и $y = 5$, что противоречит условию задачи.

Исследуем систему (2). Из этой системы находим:

$$z = 16 - 2u,$$
$$y = 14 - z - u.$$

В соответствии с условием задач можно взять только $u = 5$ или $u = 7$ (при $u = 6$ будем иметь $z = y = 4$).

Если $u = 5$, то $z = 6$, $y = 3$.

Если $u = 7$, то $z = 2$, $y = 5$.

Задача имеет два решения:

1) было куплено 3 бублика, 6 булок, 5 слоек;

2) было куплено 5 бубликов, 2 булки и 7 слоек.

2. *Следствием уравнения*

$$\lg \sin \frac{x}{2} = \lg (\cos x - \sin x) + \lg (\cos x + \sin x)$$

является уравнение $\sin \frac{x}{2} = \cos 2x$.

Последнее уравнение эквивалентно такому:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos 2x,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi \pm 2x,$$

где k принимает все целые значения.

Из последнего уравнения находим:

$$x = \frac{4}{3} k\pi - \frac{\pi}{3}, \qquad (1)$$

$$x = \frac{4}{5} k\pi + \frac{\pi}{5}. \qquad (2)$$

Так как общий период функций $\sin \frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равен 4π, то достаточно проверить, удовлетворяют ли данному уравнению значения x, лежащие на сегменте $[0, 4\pi]$. Из соотношения (1) берем следующие значения x:

$$x = \pi, \quad x = \frac{7\pi}{3}, \quad x = \frac{11\pi}{3}$$

— ни одно из этих чисел не является корнем данного уравнения.

Из соотношения (2) берем следующие значения x:

$$x=\frac{\pi}{5},\ x=\pi,\ x=\frac{9\pi}{5},\ x=\frac{13\pi}{5},\ x=\frac{17\pi}{5}.$$

Данному уравнению удовлетворяют только $x=\frac{\pi}{5}$ и $x=\frac{9\pi}{5}$.

Все корни:

$$x=\frac{\pi}{5}+4k\pi,\quad x=\frac{9\pi}{5}+4k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

3. Область определения функции

$$\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2}$$

такова:

$$-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}.$$

Перепишем данное неравенство так:

$$\sqrt{8-x^2}\geqslant x+\sqrt{25-x^2}. \qquad (1)$$

Если $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$, то правая часть этого неравенства положительна. В самом деле, при условии $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ наименьшее ее значение равно:

$$-2\sqrt{2}+\sqrt{25-8}=\sqrt{17}-2\sqrt{2}>0.$$

Значит, неравенство (1) эквивалентно следующей системе:

$$8-x^2\geqslant x^2+2x\sqrt{25-x^2}+25-x^2,$$
$$-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$$

или

$$17+x^2\leqslant -2x\sqrt{25-x^2},$$
$$-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}.$$

Среди значений $0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ нет решений этого неравенства. Поэтому, предполагая, что $-2\sqrt{2}\leqslant x<0$, заключаем, что последнее неравенство, а вместе с тем и данное, эквивалентно системе:

$$289+34x^2+x^4\leqslant 4x^2(25-x^2),$$
$$-2\sqrt{2}\leqslant x<0$$

или

$$5x^4-66x^2+289\leqslant 0,$$
$$-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 0,$$

но эта система неравенств решений не имеет. Значит, данное неравенство не имеет решений.

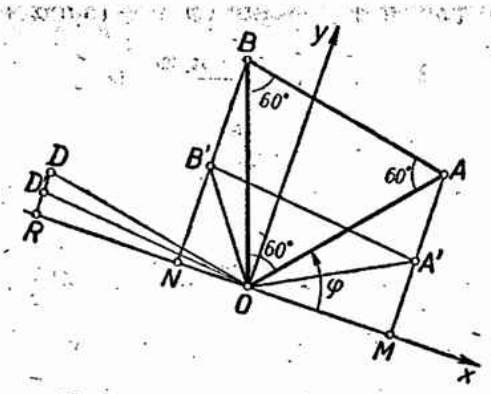


Рис. 28

4. Не нарушая общности, можно считать, что одна из вершин данного правильного треугольника лежит на линии l пересечения плоскостей P и Q. Заметим, что всякий отрезок d, перпендикулярный к линии пересечения плоскостей P и Q и лежащий на плоскости P, проектируется на плоскость Q в отрезок, длина которого равна $d\cos\alpha$ (считаем $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Введем на плоскости Q декартову систему координат, принимая вершину O данного треугольника за начало координат, а прямую l — за ось Ox. Повернем плоскость P вокруг оси Ox, и пусть две другие вершины данного треугольника совместятся с точками A и B плоскости Q (рис. 28). Пусть M и N — проекции точек A и B на ось Ox, а A' и B' — проекции на плоскость Q двух вершин данного треугольника, отличных от точки O (рис. 28). Тогда

$$\frac{MA'}{MA} = \cos\alpha, \quad \frac{NB'}{NB} = \cos\alpha$$

и, значит, точка A' имеет координаты

$$\cos\varphi, \quad \sin\varphi\cos\alpha,$$

а точка B' — координаты $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cos\alpha$, где φ — угол от оси Ox до луча OA. Отложим от точки O направленные отрезки $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OD'}$, соответственно равные* направленным отрезкам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$. Так как угол от Ox до $\overrightarrow{OD}$ равен $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{D'R}{DR} = \cos\alpha$ (R — точка пересечения DD' с Ox; $DD' \perp Ox$), то координаты точки D' таковы: $\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\alpha$.

Теперь имеем:

$$s = OA'^2 + OB'^2 + A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 + OD'^2 = \cos^2\varphi +$$
$$+ \sin^2\varphi\cos^2\alpha + \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cos^2\alpha + \cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) +$$

* Два направленных отрезка называются равными, если равны их длины, если они лежат на параллельных прямых или на одной и той же прямой и если они направлены в одну сторону.

$$+\sin^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\cos^2\alpha = 1-\sin^2\varphi\sin^2\alpha + 1-\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\alpha +$$

$$+ 1-\sin^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\sin^2\alpha = 3-\sin^2\alpha\left[\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\right].$$

Но

$$\cos 2\varphi+\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+$$

$$+\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=0.$$

Следовательно,

$$s=3-\frac{3}{2}\sin^2\alpha.$$

Таким образом, полученные значения для суммы квадратов длин проекций сторон данного треугольника не зависят от φ.

5. Как и в решении задачи № 5 предыдущего варианта, находим что если z, w — решение данной системы, то

$$|z|=|w|=1,$$

и что

$$5\varphi+7\theta=2k\pi,$$
$$2\varphi+3\theta=2s\pi,$$

где k и s — целые числа, а φ и θ — соответственно аргументы z и w. Находим:

$$\varphi=6k\pi-14s\pi,$$
$$\theta=-4k\pi+10s\pi,$$

а, значит,

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi=1,\quad w=\cos\theta+i\sin\theta=1.$$

Проверкой убеждаемся, что $z=1$, $w=1$ — решение данной системы.

Вариант 3

1. Пусть школьник имеет x монет по 1 коп., y монет по 2 коп., z монет по 3 коп., u монет по 5 коп. и v монет по 10 коп. Согласно условию задачи

$$v-x-y-z-u=4,$$
$$x+2y+3z+5u+10v=100.$$

Далее, из условия задачи следует, что имеет место один из случаев:

1°. $x = 0,\ u = 0;$
2°. $x = y = z = 0.$

В случае 1° имеем систему:

$$v - y - z = 4,$$
$$2y + 3z + 10v = 100.$$

Отсюда

$$z = 108 - 12v,$$
$$y = v - z - 4.$$

Если взять $v = 9$, то $z = 0$, $y = 5$ — это не решение задачи, так как из условия задачи следует, что $z \neq 0$. Если взять $v = 8$, то $z = 12$ и получится, что $y < 0$. Также будем иметь $y < 0$, если v меньше 8. Итак, в предположении 1° задача не имеет решения.

2°. Если $x = y = z = 0$, то получим систему:

$$v - u = 4,$$
$$5u + 10v = 100,$$

или

$$v - u = 4,$$

откуда

$$u + 2v = 20,$$

$$v = 8,\ u = 4.$$

Итак, у школьника было 4 монеты достоинством 5 коп. и 8 монет по 10 коп.

2. *Следствием* данного уравнения является следующее:

$$\frac{\sin x}{\cos x\,(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = 2,$$

откуда

$$2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,\ \operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Значение $\operatorname{tg} x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$ не дает решений данного уравнения, так как если $\operatorname{tg} x < 0$, то или $\sin x < 0$ или $\cos x < 0$.

Если

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{4},$$

то на полуинтервале $0 \leqslant x < 2\pi$ имеется только один корень данного уравнения:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17} - 1}{4},$$

а все корни (2π — период):

$$x = 2k\pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-1}{4}.$$

3. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sqrt{x-5} \geqslant 1 + \sqrt{9-x}$$

или следующей системе:

$$\left.\begin{array}{c} x-5 \geqslant 10-x+2\sqrt{9-x}, \\ 5 \leqslant x \leqslant 9 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{c} 2x-15 \geqslant 2\sqrt{9-x}, \\ 5 \leqslant x \leqslant 9. \end{array}\right\}$$

Если $5 \leqslant x \leqslant \frac{15}{2}$, то $2x-15 < 2\sqrt{9-x}$,

поэтому последняя система эквивалентна такой:

$$\begin{array}{c} 2x-15 \geqslant 2\sqrt{9-x}, \\ \frac{15}{2} < x \leqslant 9, \end{array}$$

или такой

$$\begin{array}{c} 4x^2-60x+225 \geqslant 4\ (9-x), \\ \frac{15}{2} < x \leqslant 9, \end{array}$$

или

$$\begin{array}{c} 4x^2-56x+189 \geqslant 0, \\ \frac{15}{2} < x \leqslant 9. \end{array}$$

Корни уравнения $4x^2-56x+189=0$ таковы:

$$\frac{14 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Так как

$$\frac{14-\sqrt{7}}{2} < \frac{15}{2},\ 9 > \frac{14+\sqrt{7}}{2} > \frac{15}{2},$$

то все решения данного неравенства:

$$\frac{14+\sqrt{7}}{2} \leqslant x \leqslant 9.$$

4. Не нарушая общности решения, можно предположить, что одна из вершин O квадрата лежит на прямой l, по которой пересекаются плоскости P и Q $\left(\text{считаем } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

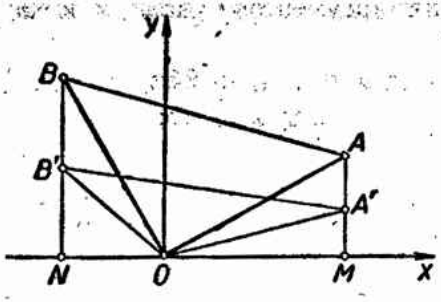


Рис. 29

Введем в плоскости Q систему координат, принимая точку O за начало координат, а прямую l за ось Ox (рис. 29). Повернем плоскость P вокруг оси l так, чтобы вершины квадрата A_1 и B_1, соседние с вершиной O, попали на плоскость Q (соответственно точки A и B на рис. 29). Пусть M и N—проекции точек A и B на ось Ox и A' и B'—точки отрезков AM и BN такие, что

$$\frac{A'M}{AM} = \cos\alpha, \quad \frac{B'N}{BN} = \cos\alpha.$$

Тогда точки A' и B' можно рассматривать как проекции точек A_1 и B_1 на плоскость Q. Половина p длины периметра проекции данного квадрата на плоскость Q равна:

$$p = OA' + OB'.$$

Так как точка A' имеет координаты

$$\cos\varphi, \ \sin\varphi\cos\alpha,$$

а точка B' имеет координаты

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha$$

или

$$-\sin\varphi, \ \cos\varphi\cos\alpha,$$

то

$$p = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha} + \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\alpha}$$

(α — угол от оси Ox до луча OA).
Величина p будет наибольшей, если наибольшей будет величина p^2:

$$p^2 = 1 + \cos^2\alpha + 2\sqrt{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\alpha)}$$

или если наибольшим будет выражение

$$(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\alpha)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\alpha) =$$
$$= (1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi) = 1 - \sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^4\alpha\sin^2 2\varphi.$$

Это выражение имеет наибольшее значение, если $\sin 2\varphi = 1$, т. е. $\varphi = 45°$; при этом диагональ A_1B_1 квадрата параллельна прямой l.

5. Как и в двух предыдущих вариантах, доказывается, что

$$|z| = |w| = 1.$$

Пусть φ и θ соответственно значения аргументов чисел z и w; тогда

$$3 \arg z = 5 \arg (-w) = 5 (\arg w + \pi) + 2k\pi,$$
$$2 \arg z + 4 \arg \overline{w} = 2 \arg z - 4 \arg w + 2s\pi$$

или

$$3\varphi - 5\theta = (2k + 1)\pi,$$
$$2\varphi - 4\theta = 2s\pi.$$

Отсюда

$$\varphi = 2\pi (2k + 1) - 5s\pi$$

и, значит, $\cos \varphi = \pm 1$, $\sin \varphi = 0$, т. е. $z = \pm 1$. Если $z = 1$, то данная система принимает вид:

$$1 + w^5 = 0,$$
$$\overline{w}^4 = 1$$

или

$$1 + \overline{w}^5 = 0, \quad \overline{w}^4 = 1.$$

Отсюда $\overline{w} = -1$ и, значит, $w = -1$. Пара чисел $z = 1$, $w = -1$ образует решение данной системы. Если $z = -1$, то $-1 + w^5 = 0$, $\overline{w}^4 = 1$. Отсюда $w = 1$. Пара чисел $z = -1$, $w = 1$ образует решение данной системы.

Вариант 4

1. Пусть количество порций за 7, 9, 11,13 и 15 коп. соответственно равны x, y, z, u, v. По условию задачи:

$$x + y + z + u + v = 180,$$
$$7x + 9y + 11z + 13u + 15v = 1840,$$
$$x + y = z + u + v,$$
$$y = 2v,$$
$$y > u.$$

Отсюда находим:

$$x = 90 - 2v,$$
$$y = 2v,$$
$$z = 3v - 20,$$
$$u = 110 - 4v.$$

Так как $u \geqslant 0$, то $v \leqslant \frac{110}{4} = 27{,}5$, т. е. $v \leqslant 27$. С другой стороны, $y > u$, значит, $6v > 110$, и потому $v \geqslant 19$. Но согласно условию задачи v должно делиться на 10, поэтому $v = 20$; тогда $x = 50$, $y = 40$, $z = 40$, $u = 30$.

2. Следствием данного уравнения является следующее уравнение:

$$\cos 2x = 2 \sin x \cos x$$

или

$$\operatorname{tg} 2x = 1.$$

Отсюда

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

Корни, заключенные на полуинтервале $[0, 2\pi)$:

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad x_3 = \pi + \frac{\pi}{8}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

Так как $\cos x_2 < 0$, $\cos x_3 < 0$, $\sin x_4 < 0$, то x_2, x_3, x_4 — не корни. Так как $\cos x_1 > 0$, $\sin x_1 > 0$, $\cos 2x_1 > 0$, то x_1 — корень. Все корни:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{8}.$$

3. 1°. $0 < a < 1$. Тогда данное неравенство эквивалентно такому:

$$0 < \sqrt{25 - x^2} - 1 \leqslant |x| + 1$$

или

$$\sqrt{25 - x^2} > 1, \quad \sqrt{25 - x^2} \leqslant |x| + 2,$$

а эта система неравенств эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} |x| < 2\sqrt{6}, \\ 25 - |x|^2 \leqslant |x|^2 + 4|x| + 4 \end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{gathered} 2|x|^2 + 4|x| - 21 \geqslant 0, \\ |x| < 2\sqrt{6}. \end{gathered}\right\} \qquad (1)$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{46} - 2}{2} \leqslant |x| < 2\sqrt{6};$$

иначе

$$-2\sqrt{6} < x \leqslant \frac{2 - \sqrt{46}}{2}, \quad \frac{\sqrt{46} - 2}{2} \leqslant x < 2\sqrt{6}.$$

2°. $a > 1$. В этом случае вместо системы (1) получим:

$$2|x|^2 + 4|x| - 21 \leqslant 0,$$

или

$$0 \leqslant |x| \leqslant \frac{\sqrt{46}-2}{2},$$

т. е.

$$\frac{2-\sqrt{46}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{46}-2}{2}.$$

4. Будем считать, что одна из вершин O куба лежит на плоскости p проекции, а OA, OB и OC — три ребра куба, выходящие из точки O. Длина проекции OA' ребра OA на плоскость p равна:

$$OA \cos\alpha = OA \sin\alpha' = \sin\alpha',$$

где α — угол ребра OA с плоскостью проекции, а α' — угол между ребром OA и перпендикуляром OO' к плоскости проекции. Аналогично находим величины проекций

$$\sin\beta' \quad \text{и} \quad \sin\gamma'$$

ребер OB и OC (β' и γ' — углы OB и OC с OO').

Теперь находим:

$$\sigma = \sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = 3 - (\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma').$$

Но $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ — величины проекций на ребра OA, OB, OC данного куба *отрезка* $OO' = 1$, прямой, проходящей через O перпендикулярно плоскости проекций, иначе говоря, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ — это координаты точки Q'. Так как $OO' = 1$, то $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$ и, значит,

$$\sigma = 3 - 1 = 2.$$

Для того чтобы получить величину суммы квадратов проекций всех 12 ребер куба, надо этот результат умножить на 4; тогда получится 8.

5. Из второго уравнения системы следует, что

$$z^{15}w^{21} = 1,$$

а теперь из этого уравнения и первого уравнения системы следует, что

$$z^2w^2 = 1,$$

а так как

$$z^2 + w^2 = -2,$$

то

$$z^2 = -1, \quad w^2 = -1,$$

и, значит, надо (проверкой!) установить, какая из пар

$$(i, i), \quad (-i, i), \quad (i, -i), \quad (-i, -i)$$

образует решение системы.

Проверкой устанавливаем, что (i, i) — решение, $(-i, i)$ — не решение, $(i, -i)$ — не решение, $(-i, -i)$ — решение.

Итак, данная система имеет два решения:

$$z_1 = i,\ w_1 = i;\ z_2 = -i,\ w_2 = -i.$$

§ 28. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1966 г.

Вариант 1

1. 1,1 центнера.
2. $x = \frac{85}{4}$.
3. $AO = \frac{a}{(\pi - \alpha)\sin\frac{\alpha}{2}}$ или $\frac{a}{(\pi + \alpha)\sin\frac{\alpha}{2}}$.
4. $x_1 = 2,\ x_2 = -1$.
5. $x_1 = 4 - \sqrt{10},\ x_2 = 4 + \sqrt{10},\ x_3 = \frac{3\pi}{2}$,

$$x_4 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3},\quad x_5 = \frac{\pi}{2},\ x_6 = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Вариант 2

1. На 300.
2. $x = 2$.
3. $CB = \frac{2a\sin\alpha\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$.
4. $x_1 = 1,\ x_2 = 4$.
5. $x_1 = 1,\ x_2 = 10,\ x_3 = \frac{\pi}{3},\ x_4 = \frac{5\pi}{3}$,

$$x_5 = 2\pi - 2\arcsin\frac{1}{5}.$$

Вариант 3

1. На 14 порций.
2. $x = 14$.
3. $b\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + b\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.
4. $x_1 = 2,\ x_2 = 5$.
5. $x = 2,\ x = -5,\ x = 4k\pi + \frac{2\pi}{3}$, где k — любое целое число;

$$x = 4k\pi - \frac{2\pi}{3},$$ где k любое целое число, кроме $k=0$;

$$x = 4k\pi + 2\arccos\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right),$$ где k — любое целое число;

$x = 4k\pi - 2\arccos\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$, где k — любое целое число не равное 0.

Вариант 4

1. 130 порций по 20 коп., 23 порции по 13 коп.
2. $x = -25$.
3. $\frac{a}{2}\sqrt{9 + 8\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
4. $x_1 = 6$, $x_2 = 3$.
5. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{7} - 2)$ } k — любое целое число, кроме 0 и 1.

   $x = 2k\pi - \operatorname{arctg} 3$, $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{7} + 2)$ } k — любое целое число, кроме 1 и 2.

$$x = 6 \pm \sqrt{30}.$$

§ 29. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1966 г.

Вариант 1

1. $AB = 30$ *км/ч*; $v_1 = 30$ *км/ч*, $v_2 = 20$ *км/ч*.
2. Из первого уравнения системы находим $x^y = 1$. Отсюда $x = 1$ ($y \neq 0$, так как во второе уравнение входит $\log_2 y$). Теперь из первого уравнения находим $y = 2$.
3. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем

$$(-1 = \log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)^{-1};\ 0 < \operatorname{tg} x \neq 1):$$

$$1^\circ.\ \operatorname{tg} x > 1,\ 0 < \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < (\operatorname{tg} x)^{-1};$$

$$2^\circ.\ 0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} > (\operatorname{tg} x)^{-1}$$

или

$$1^\circ.\ \operatorname{tg} x > 1,\ \sin^2 x - \frac{5}{12} < \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x},\ \sin^2 x - \frac{5}{12} > 0;$$

$$2^\circ.\ 0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \sin^2 x - \frac{5}{12} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$1^\circ.\ \operatorname{tg} x > 1,\ \frac{7}{12} - \cos^2 x < \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x},\ \frac{7}{12} - \cos^2 x > 0;$$

$$\operatorname{tg} x > 1,\ \frac{7}{12} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} < 0,\ \frac{7}{12} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > 0;$$

$$\operatorname{tg} x > 1,\ \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{4}{7}\right)(\operatorname{tg}^2 x - 3) < 0,\ \operatorname{tg}^2 x > \frac{5}{7}.$$

Эта система неравенств эквивалентна следующей:

$$1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

2°. $0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \sin^2 x - \frac{5}{12} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$;

$0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \frac{7}{12} - \cos^2 x > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$;

$0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \frac{7}{12} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 0$;

$0 < \operatorname{tg} x < 1,\ \operatorname{tg}^2 x > 3.$

Эта система неравенств не имеет решений.

4а). Расстояние от центра шара T до вершины куба равно $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Проведем диагональ куба. Пусть P и Q — точки ее пересечения с шаром, а A — один из концов диагоналей.

Тогда

$$AP = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2},\ AQ = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}.$$

Произведем преобразование гомотетии (подобия) с центром A и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{AQ}{AP}$. Тогда точка P перейдет в точку Q, а шар T перейдет в шар T', касающийся первого шара в точке Q и касающийся всех граней куба, сходящихся в точке A. Так как коэффициент подобия k равен:

$$k = \frac{AQ}{AP} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

то радиус шара T' равен:

$$\frac{a}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

4б). Возможны лишь следующие три случая:

1°. Буква A входит два раза, буква B — три раза.

2°. Буква $Б$ входит один раз, буква A — один раз, буква B — три раза.

3°. Буква $Б$ входит один раз, буква A — два раза, буква B — два раза.

Число перестановок из пяти элементов равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Значит, соединений типа 1° будет:

$$\frac{120}{2!\,3!} = 10.$$

Соединений типа 2° будет:

$$\frac{120}{3!} = 20.$$

Соединений типа 3° будет:

$$\frac{120}{2!\,2!} = 30.$$

Итого, всех соединений рассматриваемого типа будет 60.

Вариант 2

1. $AB = 360$ *км*, $v = 120$ *км/ч*.

2. Учитывая, что $y \geqslant 0$ и решая второе уравнение данной системы относительно y, найдем $y = 3^{x-1}$. Теперь первое уравнение примет вид:

$$4\sqrt{y} = y + 3,$$

или

$$y - 4\sqrt{y} + 3 = 0.$$

Отсюда

$$y = 2 \pm 1.$$

Следовательно,

$$y_1 = 1,\ x_1 = 1;\ y_2 = 9,\ x_2 = 3.$$

3. Неравенство

$$\log_{\operatorname{ctg} x} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < 1$$

эквивалентно двум системам ($0 < \operatorname{ctg} x \neq 1$, $1 = \log_{\operatorname{ctg} x} \operatorname{ctg} x$):

1°. $\operatorname{ctg} x > 1$, $0 < \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < \operatorname{ctg} x$;

2°. $0 < \operatorname{ctg} x < 1$, $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x} > \operatorname{ctg} x$.

1°. $\operatorname{ctg} x > 1$ (следовательно, $\cos x \neq 1$), $0 < 1 + \sin x < \operatorname{ctg} x - \cos x \operatorname{ctg} x$. Условие $\sin x > -1$ следует из неравенства $\operatorname{ctg} x > 1$; неравенство $1 + \sin x < \operatorname{ctg} x - \cos x \operatorname{ctg} x$ преобразуется к виду $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} < -1$. Так как $x \neq 2k\pi$, то $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ и, значит,

в случае 1° получаем $\operatorname{ctg} x > 1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < -1$.

Из неравенства $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant -1$ находим:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$-\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

и так как $\operatorname{ctg} x > 1$, то

$$-\pi + 2k\pi < x < -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

2°. $0 < \operatorname{ctg} x < 1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > -1$.

Из неравенства $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > -1$ находим:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,$$

но так как должно быть $0 < \operatorname{ctg} x < 1$, то

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

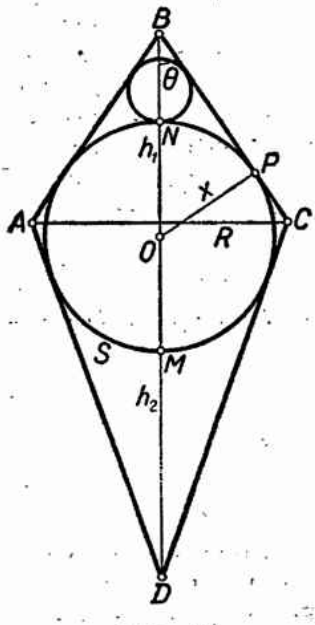


Рис. 30

4а. Пусть $ABCD$ — сечение конусов плоскостью, проходящей через их общую ось (рис. 30). Пусть x — радиус сферы Σ, о которой говорится в условии задачи, а S — ее сечение плоскостью $ABCD$. Сравнивая площадь четырехугольника $ABCD$, вычисленную двумя способами, находим:

$$R(h_1 + h_2) = x\sqrt{R^2 + h_1^2} + x\sqrt{R^2 + h_2^2},$$

откуда

$$x = \frac{R(h_1 + h_2)}{\sqrt{R^2 + h_1^2} + \sqrt{R^2 + h_2^2}}.$$

Пусть O — центр окружности S. Из треугольника OPB

находим: $OB = \frac{x}{\sin\theta}$, где $\theta = \angle OBP$. Так как $\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{h_1}$, то $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+h_1^2}}$ и, значит, $OB = \frac{x\sqrt{R^2+h_1^2}}{R}$. Обозначим через M и N точки пересечения BD с окружностью S.

Произведем гомотетию с центром B и коэффициентом гомотетии

$$k = \frac{BN}{BM} = \frac{BO-x}{BO+x} = \frac{\sqrt{R^2+h_1^2}-R}{\sqrt{R^2+h_1^2}+R}.$$

При этой гомотетии сфера Σ перейдет в искомую, а ее радиус будет, следовательно, равен:

$$\rho = \frac{R(h_1+h_2)}{\sqrt{R^2+h_1^2}+\sqrt{R^2+h_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{R^2+h_1^2}-R}{\sqrt{R^2+h_1^2}+R}.$$

46. Русский алфавит содержит 33 буквы (в их число включены и знаки ъ и ь): а, б, в, г, д, е, ё, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э, ю, я.

Дадим точное определение лексикографического (словарного) расположения упорядоченных совокупностей букв. Будем считать, что упорядоченная совокупность $x_1x_2\ldots x_k$ (через x_i обозначены буквы русского алфавита) предшествует упорядоченной совокупности $y_1y_2\ldots y_s$ (y_i — также буквы русского алфавита), если буква x_1 предшествует в порядке алфавита букве y_1. Если же x_1 и y_1 — одна и та же буква, то будем считать, что $x_1x_2\ldots x_k$ предшествует $y_1y_2\ldots y_s$, если буква x_2 предшествует в порядке алфавита букве y_2, и т. д. Кроме того, условимся в том, что $x_1x_2\ldots x_k$ предшествует $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}\ldots x_n$. Теперь перейдем к решению задачи. За словом «экзамен» первая последовательность, имеющая длину 1, есть буква «ю». Все последовательности, длина которых равна 2 и которые следуют за буквой «ю» (следовательно, и за словом «экзамен»), таковы:

юа, юб, юв, ..., юъ, юы, юь, юэ, ююю, юя; (1)

их всего 33. Последовательности, длина которых равна 3 и которые следуют за последовательностью «юа», таковы:

юаа, юаб, ..., юаю, юая,
юба, юбб, ..., юбю, юбя,
. . . . . .
юяа, юяб, ..., юяю, юяя;

их всего 33^2.

Так как по условию задачи следует ограничиться только последовательностями, состоящими не более чем из трех букв, то далее рассмотрим последовательность из одной буквы «я», следующую за словом «экзамен», затем — последовательности из двух букв, следующие за буквой «я» (их 33), и, наконец, последовательности

из трех букв, следующие за последовательностью «яа» (их 33^2). Общее число рассмотренных последовательностей букв, содержащих не более трех букв и следующих за словом «экзамен», таково:

$$2(1 + 33 + 33^2) = 2246.$$

Отметим еще последовательности из двух букв:

эл, эм, ..., ээ, эю, эя,

следующие за словом «экзамен» (их всего 21), последовательности длиной 3:

эки, экй, экк, ..., экю, экя,

следующие за словом «экзамен» (их всего 24), и, наконец, последовательности длиной 3, следующие за словом «экзамен»:

эла, элб, ..., элэ, элю, эля,
эма, эмб, ..., эмэ, эмю, эмя,
. . . . . .
эяа, эяб, ... , эяэ, эяю, эяя;

их всего $21 \cdot 33 = 693$.

Таким образом, всего последовательностей, содержащих не более трех букв и следующих за словом «экзамен», будет

$$2246 + 21 + 24 + 693 = 2984.$$

Вариант 3

1. Скорость «Победы» 80 *км/ч*, скорость «Москвича» 60 *км/ч*, скорость мотоцикла 40 *км/ч*.

2. Перепишем первое уравнение в виде:

$$|x|^{\frac{1}{|x|}} = |y|^{\frac{1}{|y|}}.$$

Второе уравнение примет вид:

$$|y|^{\frac{2}{|y|}} + 2|y|^{\frac{1}{|y|}} - 3 = 0.$$

Отсюда

$$|y|^{\frac{1}{|y|}} = 1$$

и, значит, $|y| = 1$. Отсюда следует, что $x^{\frac{1}{|x|}} = 1$ и, следовательно, $|x| = 1$. Таким образом, данная система имеет четыре решения: $(\pm 1, \pm 1)$ (набор знаков — любой!).

3. Эта задача решена во введении (см. стр. 12, 13).

4а). Если сфера радиуса x касается граней двугранного угла величиной φ, то расстояние d от центра сферы до ребра двугранного угла равно (рис. 31):

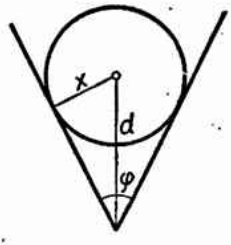


Рис. 31

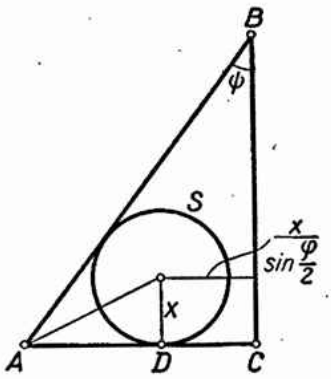


Рис. 32

$$d = \frac{x}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Пусть ABC — сечение конуса и сферы плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр сферы (рис. 32).

Пусть D — точка прикосновения AC к окружности S сечения сферы. Тогда

$$AD = x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right).$$

Теперь имеем:

$$x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) + \frac{x}{\sin\frac{\varphi}{2}} = c\sin\psi,$$

откуда

$$x = \frac{c\cdot\sin\psi\sin\frac{\varphi}{2}}{1+\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}.$$

4б). В пятизначное число 1 или не входит совсем (в качестве цифры) или входит только один раз. Если она не входит, то цифры числа могут быть:

2, 2, 2, 3, 3 — таких чисел $\frac{5!}{3!2!} = 10$;

2, 2, 3, 3, 3 — таких чисел также 10;

2, 3, 3, 3, 3 — таких чисел 5;

3, 3, 3, 3, 3 — таких чисел 1.

Если 1 входит (один раз), то цифры числа могут быть: 1, 2, 3, 3, 3 — таких чисел $\frac{5!}{3!} = 20$; 1, 3, 3, 3, 3 —таких чисел 5.

Итак, всего имеется 51 число, сумма цифр каждого из которых не менее чем 12.

Вариант 4

1. $AB = 1008$ *км*.

2. Разрешая второе уравнение относительно y и учитывая, что в силу первого уравнения $y > 0$, получим $y = 2^{x+1}$. Теперь первое уравнение примет вид:

$$x^2 = 1 + 6(x + 1)\log_4 2$$

или

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4,\ y_1 = 32; \qquad x_2 = -1,\ y_2 = 1.$$

3. Неравенство

$$\log_{2\sin x}\sqrt{1+2\cos 2x} < \frac{1}{2}$$

эквивалентно двум следующим системам $\left(\frac{1}{2} = \log_{2\sin x}(2\sin x)^{\frac{1}{2}}\right.$, $0 < 2\sin x \neq 1$):

$$1^\circ.\ 2\sin x > 1,\ 0 < \sqrt{1+2\cos 2x} < (2\sin x)^{\frac{1}{2}};$$

$$2^\circ.\ 0 < 2\sin x < 1,\ \sqrt{1+2\cos 2x} > (2\sin x)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$1^\circ.\ 2\sin x > 1,\ 0 < 3 - 4\sin^2 x < 2\sin x;$$
$$2^\circ.\ 0 < 2\sin x < 1,\ 3 - 4\sin^2 x > 2\sin x.$$
$$1^\circ.\ \sin x > \frac{1}{2},\ \sin^2 x < \frac{3}{4},\ 4\sin^2 x + 2\sin x - 3 > 0;$$
$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2},\ \left(\sin x + \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{13}-1}{4}\right) > 0.$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{13}-1}{4} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и, значит,

$$2k\pi + \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3},$$
$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} < x < 2k\pi + \pi - \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4},$$

где k принимает все целые значения.

2°. $0 \leqslant 2\sin x \leqslant 1$, $4\sin^2 x + 2\sin x - 3 \leqslant 0$;

$$0 \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2},\quad \sin x \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

или

$$0 \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда

$$2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,$$

где k принимает все целые значения.

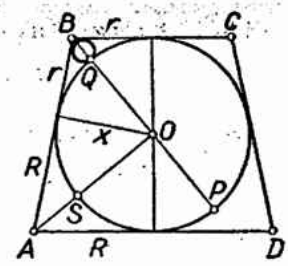


Рис. 33

4а). Пусть $ABCD$ сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через его высоту. В сечении сферы получаем большой круг S. Пусть O — его центр. Радиус окружности S находим из треугольника OAB (рис. 33):

$$x = \sqrt{Rr}.$$

Обозначим точки пересечения BO с окружностью S через P и Q ($BP > BQ$). Тогда

$$OB = \sqrt{Rr + r^2},$$
$$BQ = \sqrt{Rr + r^2} - \sqrt{Rr},$$
$$BP = \sqrt{Rr + r^2} + \sqrt{Rr}.$$

Произведем гомотетию с центром B и коэффициентом гомотетии, равным

$$k = \frac{BQ}{BP} = \frac{\sqrt{R+r} - \sqrt{R}}{\sqrt{R+r} + \sqrt{R}}.$$

При этой гомотетии сфера, вписанная в конус, перейдет в искомую, радиус которой будет, следовательно, равен:

$$\frac{\sqrt{R+r} - \sqrt{R}}{\sqrt{R+r} + \sqrt{R}}\sqrt{Rr} = \sqrt{\frac{R}{r}}(\sqrt{R+r} - \sqrt{R})^2.$$

4б). Буква «а» предшествует слову «бой». Все последовательности длиной 2, следующие за буквой «а», таковы:

аа, аб, ав, ..., аю, ая

— их всего 33. Все последовательности длиной 3 и следующие за последовательностью «аа» таковы:

ааа, ааб, аав, ..., ааю, аая,
аба, абб, абв, ..., абю, абя,
. . . . . .
аяа, аяб, авв, ..., аяю, аяя;

их всего 33^2. Аналогично устанавливаем, что имеется всего 33^3 последовательности из четырех букв, следующих за последовательностью «ааа». Так как по условию задачи надо ограничиться последовательностями, содержащими не более четырех букв, то переходим к последовательности, состоящей из одной буквы «б», затем к последовательностям:

ба, бб, ..., бн, бо

— их всего 16, длиной 2 и предшествующих слову «бой», затем к последовательностям

баа, бав, ..., баэ, баю, бая,
бба, ббб, ..., ббэ, ббю, ббя,
. . . . . .
бна, бнб, ..., бнэ, бню, бня,

— их всего $15 \cdot 33$, следующих за последовательностью «ба», но предшествующих слову «бой», и, наконец, к последовательностям «бааа», ... их всего $15 \cdot 33^2$, следующих за последовательностью «баа», но предшествующих слову «бой». Отметим, наконец, что слову «бой» предшествует последовательность «бо» (одна) и еще

боа, боб, ..., бои (10 последовательностей).

К каждой последовательности «боа», «боб», ..., «бои» можно приставлять справа каждую из букв русского алфавита. Так получим еще 330 последовательностей из четырех букв, предшествующих слову «бой». Итак, общее число последовательностей, содержащих не более чем 4 буквы и предшествующих слову «бой», равно:

$$1 + 33 + 33^2 + 33^3 + 1 + 16 + 15 \cdot 33 + 15 \cdot 33^2 + 1 + 10 + 330 = 54\,248.$$

§ 30. Факультет психологии, 1966 г.

Вариант 1

1. 40 *м*.

2. $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2$.

3. $(2k + 1)\pi$, $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $\frac{2k\pi}{5}$,

где k принимает все целые значения.

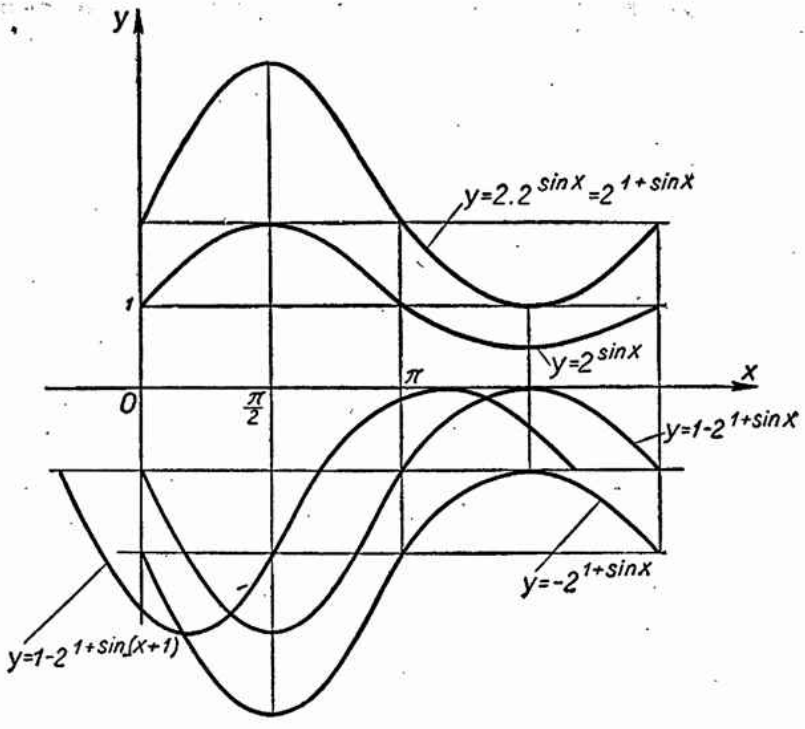


Рис. 34

4. Вне окружности с центром в точке (1, 0) и радиусом 10 или внутри окружности с центром в той же точке (1, 0) и радиусом, равным $\frac{2}{3}$.

5. График построен на рис. 34.

Вариант 2

1. $\sqrt{ab}$.

2. $\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{v^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

3. $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}$, где k принимает все целые значения.

4. Вне окружности с центром в начале координат и радиусом

$$r = \frac{\sqrt{21}+1}{2}.$$

5. График построен на рис. 35.

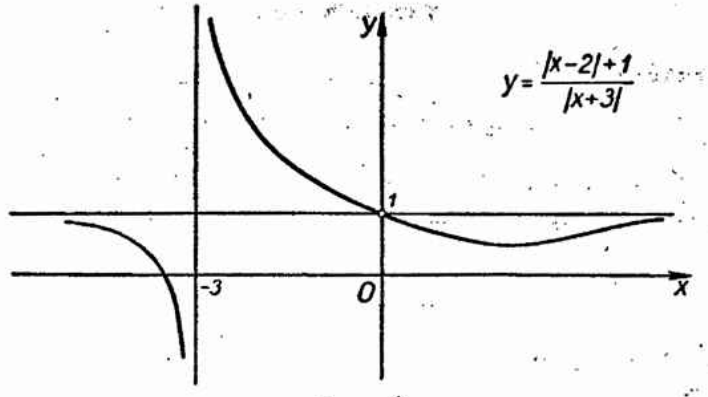


Рис. 35

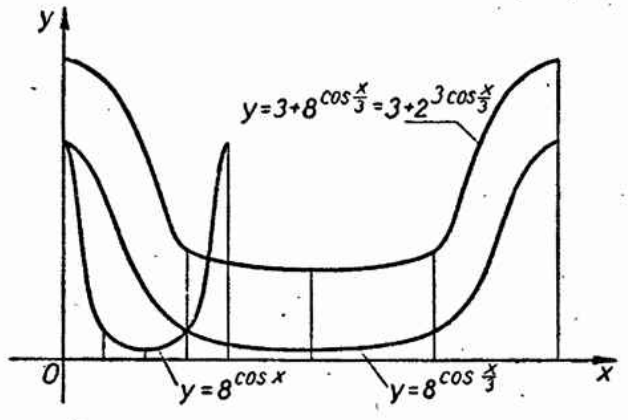


Рис. 36

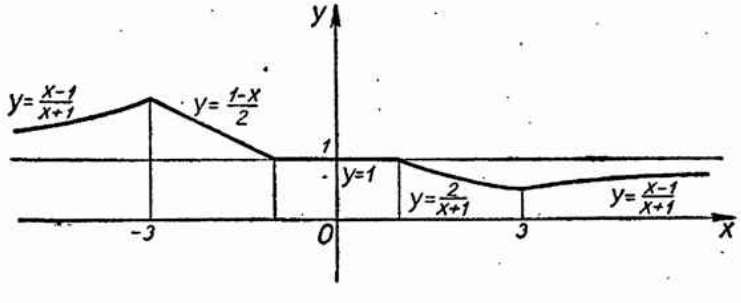


Рис. 37

Вариант 3

1. Не хватит.

2. $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, где k принимает все целые значения.

3. В той полуплоскости от прямой $x = 1$, где лежит точка (2, 0).

4. График построен на рис. 36.

Вариант 4

1. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$, где k принимает все целые значения.

3. Внутри окружность радиуса 5 с центром в начале координат.

4. График построен на рис. 37.

ГЛАВА IV

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ, 1967 г.

§ 31. Механико-математический факультет, 1967 г.

Решения.

Вариант 1

1. Область D определения функции

$$\varphi = 2|\lg(ax)|\log_x 10 - (4\lg a - 3)\log_{x^2}10 + \frac{1}{2}\lg x$$

двух аргументов x и a такова:

$$0 < x \neq 1,\ a > 0.$$

Произведем над данным уравнением следующие эквивалентные преобразования:

$$\frac{2|\lg(ax)|}{\lg x} = \frac{4\lg a - 3}{2\lg x} - \frac{1}{2}\lg x, \tag{1}$$

$$4|\lg(ax)| = 4\lg a - 3 - \lg^2 x. \tag{2}$$

Уравнение (1), очевидно, эквивалентно данному, так как при условии $0 < x \neq 1$, $a > 0$, оно *следует* из данного. С другой стороны, область определения функции

$$\psi = \frac{2|\lg(ax)|}{\lg x} - \frac{4\lg a - 3}{2\lg x} + \frac{1}{2}\lg x$$

совпадает с областью D и, кроме того, из уравнения (1) следует данное.

Докажем, что уравнения (1) и (2) эквивалентны.
Для этого заметим, что из уравнения (1) следует уравнение (2). Далее, область D_1 определения функции

$$\chi = 4|\lg(ax)| - 4\lg a + 3 + \lg^2 x$$

такова:

$$x > 0,\ a > 0,$$

и, таким образом, эквивалентность уравнений (1) и (2) будет доказана, если будет доказано, что $x = 1$ не является корнем уравнения (2), т. е. что равенство

$$4|\lg a| = 4\lg a - 3 \tag{3}$$

не выполняется ни при каком $a > 0$. Действительно, если $0 < a < 1$, то $\lg a < 0$ и соотношение (3) принимает вид

$$-4 \lg a = 4 \lg a - 3,$$

откуда $a = 10^{\frac{3}{8}}$, а это противоречит предположению $0 < a < 1$.

Если же $a \geqslant 1$, то равенство (3) принимает вид:

$$4 \lg a = 4 \lg a - 3$$

и, значит, не выполняется и при $a \geqslant 1$.

Итак, уравнение (2) эквивалентно данному.

Случай I. $ax \geqslant 1$.

Уравнение (2) принимает вид:

$$4 \lg a + 4 \lg x = 4 \lg a - 3 - \lg^2 x$$

или

$$\lg^2 x + 4 \lg x + 3 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{1}{10}, \; x = \frac{1}{1000}.$$

Условие $ax \geqslant 1$ при $x = \frac{1}{10}$ принимает вид: $\frac{a}{10} \geqslant 1$, откуда $a \geqslant 10$, а при $x = \frac{1}{1000}$ имеем: $\frac{a}{1000} \geqslant 1$, откуда $a \geqslant 1000$.

Итак, если $a \geqslant 1000$, то уравнение имеет корни $x = \frac{1}{10}$ и $x = \frac{1}{1000}$; если $10 \leqslant a < 1000$, то данное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{10}$. Если, наконец, $0 < a < 10$, то таких корней, для которых $ax \geqslant 1$, данное уравнение не имеет.

Случай II. $ax < 1$ (и, конечно, $ax > 0$).

Уравнение (2) принимает вид:

$$-4 \lg a - 4 \lg x = 4 \lg a - 3 - \lg^2 x$$

или

$$\lg^2 x - 4 \lg x - 8 \lg a + 3 = 0. \qquad (4)$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим его дискриминант:

$$\Delta = 1 + 8 \lg a.$$

Необходимое и достаточное условие действительности корней уравнения (4) таково:

$$1 + 8 \lg a \geqslant 0,$$

откуда

$$\lg a \geqslant -\frac{1}{8}.$$

Если $\lg a = -\frac{1}{8}$, т. е. $a = \frac{1}{\sqrt[8]{10}}$, то из уравнения (4) находим:

$$\lg x = 2,\ x = 100,$$

и так как $ax = \frac{100}{\sqrt[8]{10}} > 1$, то при $a = \frac{1}{\sqrt[8]{10}}$ данное уравнение не имеет корней x таких, что $ax < 1$.

Будем предполагать, что $\lg a > -\frac{1}{8}$.

Так как в рассматриваемом случае $ax < 1$, то $\lg (ax) < 0$ (и обратно) или $\lg x < -\lg a$. Таким образом, вопрос сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (4) относительно $\lg x$ имеет один или два действительных корня, меньших, чем $-\lg a$. Уравнение (4) имеет действительные корни, один из которых больше $-\lg a$, а другой меньше, чем $-\lg a$, тогда и только тогда, когда

$$\lg^2 a + 4 \lg a - 8 \lg a + 3 < 0$$

или

$$\lg^2 a - 4 \lg a + 3 < 0,$$

т. е.

$$10 < a < 1000.$$

Итак, если

$$10 < a < 1000,$$

то данное уравнение имеет один корень:

$$x = 10^{2 - \sqrt{1 + 8 \lg a}},$$

удовлетворяющий условию $ax < 1$. Если $a = 10$, то уравнение (4) принимает вид:

$$\lg^2 x - 4 \lg x - 5 = 0;$$

его корни:

$$x = \frac{1}{10},\ x = 100\,000.$$

Однако условие $ax < 1$ не выполняется при $a = 10$ и при $x = \frac{1}{10}$ или $x = 100\,000$. Значит, при $a = 10$ данное уравнение не имеет корней x таких, что $ax < 1$.

Если $a = 1000$, то уравнение (4) принимает вид:

$$\lg^2 x - 4 \lg x - 21 = 0;$$

его корни

$$x = \frac{1}{1\,000}, \quad x = 10\,000\,000$$

не удовлетворяют неравенству $ax < 1$.

Наконец, уравнение (4) имеет оба корня, меньшие $-\lg a$, тогда и только тогда, когда

$$\lg a > -\frac{1}{8},$$
$$\lg^2 a - 4\lg a + 3 > 0,$$
$$-2\lg a - 4 > 0$$

— эта система неравенств не имеет решений.

Окончательные результаты даны в таблице:

$0 < a < 10$	Корней нет
$a = 10$	$x = \frac{1}{10}$
$10 < a < 1000$	$x = \frac{1}{10}, \quad x = 10^{2 - \sqrt{1 + 8\lg a}}$
$a \geqslant 1000$	$x = \frac{1}{10}, \quad x = \frac{1}{1000}$

2. Пусть v — объем одной колбы в литрах; тогда $\frac{100}{v} = n$ — количество колб. Обозначим через x поверхность колбы, объем которой равен v, а через x_0 — поверхность колбы объемом в 1 литр. Обозначим через r радиус колбы, объем которой равен v, а через r_0 радиус колбы объемом в 1 $л$ ($v_0 = 1$). Так как

$$\frac{v}{v_0} = \frac{r^3}{r_0^3}, \quad \frac{x}{x_0} = \frac{r^2}{r_0^2} \text{ и } v_0 = 1,$$

то

$$v^2 = \frac{x^3}{x_0^3},$$

откуда

$$v = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x_0^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Стоимость одной колбы объемом в 1 $л$ равна (в рублях):

$$\frac{5}{4} = px_0^2 + qx_0,$$

причем по условию задачи $px_0^2 = \frac{1}{4}$, откуда $qx_0 = 1$ и, следовательно,

$$p = \frac{1}{4x_0^2}, \qquad q = \frac{1}{x_0}.$$

Стоимость всех колб:

$$T = (px^2 + qx)\frac{100}{v} = \left(\frac{x^2}{4x_0^2} + \frac{x}{x_0}\right)\frac{100}{x^{\frac{3}{2}}}x_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 100\sqrt{x_0}\left(\frac{\sqrt{x}}{4x_0} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Так как $v = \frac{100}{n}$, то из уравнения (1) находим:

$$x = x_0\left(\frac{100}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

и потому

$$T = 100\sqrt{x_0}\left[\frac{\left(\frac{100}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt{x_0}} + \frac{1}{\sqrt{x_0}\left(\frac{100}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}\right] =$$

$$= 100\left(\frac{\sqrt[3]{100}}{4\sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{100}}\right).$$

Будем считать, что n принимает в с е действительные положительные значения. Тогда функция

$$T = 100\left(\frac{\sqrt[3]{100}}{4\sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{100}}\right) =$$

$$= 100\left(\frac{\sqrt[6]{100}}{2\sqrt[6]{n}} - \frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{100}}\right)^2 + 100$$

принимает наименьшее значение ($T_{\min} = 100$) при

$$\frac{\sqrt[6]{100}}{2\sqrt[6]{n}} - \frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{100}} = 0,$$

откуда

$$n = \frac{100}{8} = 12{,}5.$$

Теперь заметим, что функция $T = T(n)$ в полуинтервале $\left(0, \frac{25}{2}\right]$ — убывающая, а в полуинтервале $\left[\frac{25}{2}, +\infty\right)$ — возрастающая. В самом деле, полагая $0 < n_1 < n_2$, находим:

$$T_2 - T_1 = 100\left(\frac{\sqrt[3]{100}}{4\sqrt[3]{n_2}} + \frac{\sqrt[3]{n_2}}{\sqrt[3]{100}} - \frac{\sqrt[3]{100}}{4\sqrt[3]{n_1}} - \frac{\sqrt[3]{n_1}}{\sqrt[3]{100}}\right) =$$

$$= 100\left[\frac{\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{n_1}}{\sqrt[3]{100}} - \frac{\sqrt[3]{100}\,(\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{n_1})}{4\sqrt[3]{n_1 n_2}}\right] =$$

$$= 100\,(\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{n_1})\,\frac{4\sqrt[3]{n_1 n_2} - \sqrt[3]{100^2}}{4\sqrt[3]{100 n_1 n_2}}.$$

Если $0 < n_1 < n_2 \leqslant \frac{25}{2}$, то $n_1 n_2 < \frac{25^2}{4} = \frac{100^2}{4^3}$ и, значит, $4\sqrt[3]{n_1 n_2} < \sqrt[3]{100^2}$, т. е. $T_2 - T_1 < 0$ или $T_2 < T_1$.

Если же $\frac{25}{2} \leqslant n_1 < n_2$, то $4\sqrt[3]{n_1 n_2} > \sqrt[3]{100^2}$ и, значит, $T_2 - T_1 > 0$, т. е. $T_2 > T_1$. Но так как n — число натуральное, то T принимает наименьшее значение или при $n = 12$, или при $n = 13$. Имеем: $T(13) - T(12) =$

$$= 100\,(\sqrt[3]{13} - \sqrt[3]{12})\,\frac{4\sqrt[3]{12 \cdot 13} - \sqrt[3]{100^2}}{4\sqrt[3]{12 \cdot 13 \cdot 100}} =$$

$$= 100\,(\sqrt[3]{13} - \sqrt[3]{12})\,\frac{\sqrt[3]{9984} - \sqrt[3]{10000}}{4\sqrt[3]{12 \cdot 13 \cdot 100}} < 0.$$

Значит, $T(13) < T(12)$ и наименьшее значение T принимает при числе колб, равном 13. Объем каждой колбы $\frac{100}{13}$ литра, а

$$T_{\min} = 100\left(\frac{\sqrt[3]{100}}{4\sqrt[3]{13}} + \frac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{100}}\right).$$

Отметим, что разность стоимости производства 12 и 13 колб равна приблизительно (в копейках):

$$T(12) - T(13) =$$

$$= 10000\,(\sqrt[3]{13} - \sqrt[3]{12})\,\frac{\sqrt[3]{10000} - \sqrt[3]{9984}}{4\sqrt[3]{15600}} \cong 0{,}07 \text{ коп.}$$

3. Преобразуем выражение

$$\varphi = \cos 2(t + x) + 2\sin(t + x)\cos y - \frac{1}{2}(\cos y - 1)^2 - \sin x - \frac{1}{2}$$

следующим образом:

$$\varphi = 1 - 2\sin^2(t+x) + 2\sin(t+x)\cos y - \frac{1}{2}\cos^2 y + \cos y - \sin x - 1 = -2\left[\sin(t+x) - \frac{1}{2}\cos y\right]^2 + \cos y - \sin x.$$

Каковы бы ни были x и y, всегда можно найти такое t, при котором $\sin(t+x) - \frac{1}{2}\cos y = 0$, например $t = -x + \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos y\right)$, а так как по условию задачи должно быть выполнено $\varphi < 0$ при всех значениях t, то это возможно тогда и только тогда, когда $\cos y - \sin x < 0$.

Таким образом, надо найти на координатной плоскости множество всех точек (x, y), для которых выполнено неравенство

$$\cos y - \sin x < 0. \qquad (1)$$

Введем новую систему координат $x'O'y'$, полученную из заданной xOy переносом таким, что новое начало координат O' имеет в системе xOy координаты $\frac{\pi}{2}$, 0; тогда $x' = x + \frac{\pi}{2}$, $y = y'$ и неравенство (1) принимает вид:

$$\cos y' - \cos x' < 0$$

или

$$2\sin\frac{x'+y'}{2}\sin\frac{x'-y'}{2} < 0.$$

Исследуем знак функции $\sin\frac{x'+y'}{2}$. Очевидно, что

$$\sin\frac{x'+y'}{2} > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$4k\pi < x' + y' < 4k\pi + 2\pi, \qquad (2)$$

где k принимает все целые значения, и

$$\sin\frac{x'+y'}{2} < 0$$

тогда и только тогда, когда

$$-2\pi + 4\pi n < x' + y' < 4\pi n, \qquad (3)$$

где n принимает все целые значения.

При каждом значении k и n неравенства (2) и (3) определяют множество всех точек, лежащих между двумя параллельными прямыми:

$$x' + y' = 4k\pi, \quad x' + y' = 4k\pi + 2\pi$$

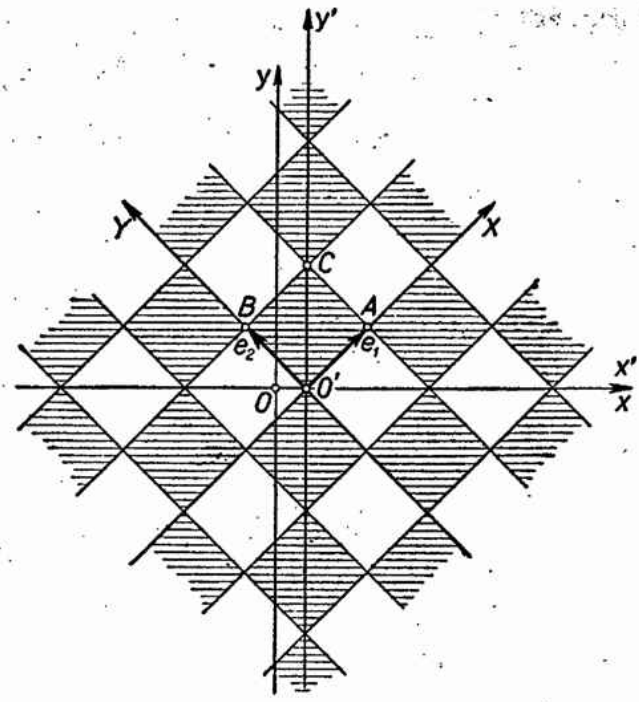


Рис. 38

для неравенств (2) и

$$x' + y' = -2\pi + 4n\pi, \qquad x' + y' = 4n\pi$$

для неравенств (3).

Аналогично исследуется знак функции $\sin \frac{x' - y'}{2}$. Если

$$4m\pi < x' - y' < 4m\pi + 2\pi, \text{ то } \sin \frac{x' - y'}{2} > 0,$$

а если

$$-2\pi + 4s\pi < x' - y' < 4s\pi, \text{ то } \sin \frac{x' - y'}{2} < 0;$$

m и s принимают все целые значения (рис. 38).

Часть плоскости состоит из всех внутренних точек квадратов. Координаты вершин одного из них: $O'(\frac{\pi}{2}, 0)$, $A(\frac{3\pi}{2}, \pi)$, $B(-\frac{\pi}{2}, \pi)$, $C\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$. Все остальные квадраты получаются всеми переносами квадрата $O'ACB$, определяемыми соотношениями:

$$x'' = x' + 2l\pi, \; y'' = y' + 2p\pi,$$

где l и p принимают все целые значения.

Можно записать и уравнения сторон любого из таких квадратов:

$$\left.\begin{aligned} x' + y' &= 4k\pi, \\ x' + y' &= 4k\pi + 2\pi, \\ x' - y' &= -2\pi + 4s\pi, \\ x' - y' &= 4s\pi \end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x' + y' &= -2\pi + 4n\pi, \\ x' + y' &= 4n\pi, \\ x' - y' &= 4m\pi, \\ x' - y' &= -2\pi + 4m\pi, \end{aligned}\right\}$$

где k, m, n, s принимают все целые значения.

Замечание. Читателю, достаточно знакомому с аналитической геометрией, укажем еще на один метод решения. Произведем преобразование декартовой системы координат, принимая за новое начало координат точку $O'\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, а за новые масштабные векторы

$$\overrightarrow{O'A} = e_1 = \{\pi,\ \pi\}, \quad \overrightarrow{O'B} = e_2 = \{-\pi,\ \pi\};$$

формулы преобразования:

$$x = \pi X - \pi Y + \frac{\pi}{2},$$

$$y = \pi X + \pi Y;$$

неравенство (1) примет вид:

$$\cos(\pi X + \pi Y) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi X - \pi Y\right) < 0$$

или

$$\cos\pi X \cos\pi Y - \sin\pi X \sin\pi Y - \cos\pi X \cos\pi Y - \\ - \sin\pi X \sin\pi Y < 0$$

или

$$\sin\pi X \sin\pi Y > 0.$$

Неравенство $\sin\pi X > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$2k < X < 2k + 1,$$

а неравенство $\sin\pi X < 0$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$2n - 1 < X < 2n,$$

k и n — любые целые числа.

Аналогично,

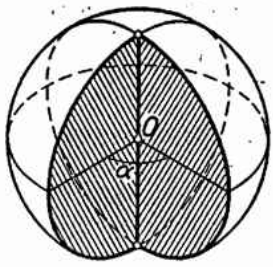


Рис. 39

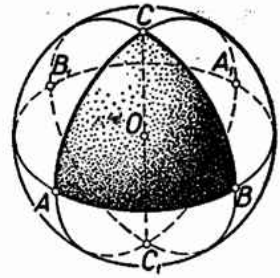


Рис. 40

$$\sin \pi Y > 0, \text{ если } 2m < Y < 2m + 1;$$
$$\sin \pi Y < 0, \text{ если } 2s - 1 < Y < 2s;$$

m и s — любые целые числа.

Например, при $k = m = 0$ получаем квадрат $0 < X < 1$, $0 < Y < 1$ — это квадрат $Q'ACB$. Все решения неравенства (1) являются координатами любой внутренней точки любого квадрата, полученного из квадрата $Q'ACB$ переносами:

$$x' = x + l, \qquad y' = y + p,$$

где l и p — любые целые числа, причем $|l|$ и $|p|$ одинаковой четности.

Уравнения сторон этих квадратов:

$$X = 2k,\ X = 2k + 1,\ Y = 2m,\ Y = 2m + 1$$

или

$$X = 2n - 1,\ X = 2n,\ Y = 2s - 1,\ Y = 2s,$$

где k, m, n, s — любые целые числа. Например, при $k = m = 0$ получаем уравнения сторон квадрата $Q'ACB$ (в системе $XO'Y$):

$$X = 0,\ X = 1,\ Y = 0,\ Y = 1.$$

4. Предварительно решим следующую задачу: в центре сферы радиуса R находится вершина трехгранного угла, внутренние двугранные углы которого равны A, B и C. Ребра этого трехгранного угла пересекают эту сферу в точках, которые мы обозначим соответственно теми же буквами A, B и C (A — внутренний двугранный угол трехгранного угла с ребром OA, где O — центр сферы и т. д.). Грани рассматриваемого трехгранного угла пересекают сферу по дугам $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$ и $\overset{\smile}{CA}$, являющимся дугами больших кругов сферы. Эти дуги образуют сферический треугольник $\overset{\smile}{ABC}$. Выразим его площадь S через величины A, B, C внутренних двугранных углов данного трехгранного угла и радиус R рассматриваемой сферы.

Сначала заметим, что площадь части сферы, заключенной внутри двугранного угла величиной α, ребром которого является диаметр сферы, равна $2\alpha R^2$ (рис. 39).

Рассмотрим теперь сферический треугольник $\overset{\frown}{ABC}$ (рис. 40). Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки, симметричные соответственно точкам A, B и C относительно центра O сферы. Полусфера, расположенная по ту сторону от плоскости OAB, где расположена точка C, дугами $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$ делится на 4 сферических треугольника: $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{A_1BC}$, $\overset{\frown}{B_1AC}$, $\overset{\frown}{B_1A_1C}$. Обозначая площади этих сферических треугольников соответственно через S, S_1, S_2, S_3 (заметим, что площадь треугольника $\overset{\frown}{B_1A_1C}$ равна площади треугольника $\overset{\frown}{C_1AB}$), будем иметь:

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi R^2,$$
$$S + S_1 = 2AR^2,$$
$$S + S_2 = 2BR^2,$$
$$S + S_3 = 2CR^2.$$

Отсюда

$$A + B + C = \pi + \frac{S}{R^2}. \qquad (1)$$

Теперь перейдем к решению данной задачи (рис. 41). Так как все двугранные углы данной пирамиды равны между собой, то, полагая $R = 1$, из формулы (1) получим:

$$3A = \pi + S.$$

И так как при условии $R = 1$ поверхность сферы равна 4π, а S по условию составляет $\frac{1}{10}$ этой величины, то

$$3A = \pi + \frac{4\pi}{10},$$

откуда

$$A = \frac{7\pi}{15}$$

— такова величина внутреннего двугранного угла A, ребром которого является боковое ребро пирамиды.

Проведем через прямую PQ плоскость, перпендикулярную OR (это возможно, так как $PQ \perp OR$). Пусть эта плоскость пересечет ребро OR в точке N. Пусть M — середина отрезка PQ.

Тогда $MN = \delta$ — кратчайшее расстояние между PQ и OR. Из треугольника MNQ находим (рис. 42):

$$\delta = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Объем пирамиды $OPQR$ равен, с одной стороны, $\frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, с другой стороны, $\frac{1}{6} al\delta \sin 90° = \frac{a^2}{12} l \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ $(l = OR)$.

Приравнивая эти выражения, получим:

$$l = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Теперь из треугольника OTR (T—проекция O на плоскость PQR, $OT = 1$, $\angle OTR = 90°$) находим $\left(TR = \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$:

$$1 + \frac{a^2}{3} = 3 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2},$$

откуда

$$a^2 = 3\left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} - 1\right) =$$

$$= 3\left[3 \frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A} - 1\right] =$$

$$= 6 \frac{1 - 2\cos A}{1 + \cos A}$$

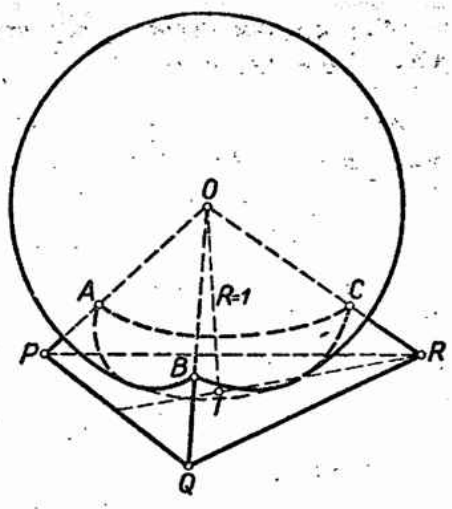


Рис. 41

и, значит, объем $V_п$ пирамиды $OPQR$ равен $\frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot 3}$, т. е.

$$V_п = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - 2\cos A}{1 + \cos A}.$$

Объем шара равен:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi,$$

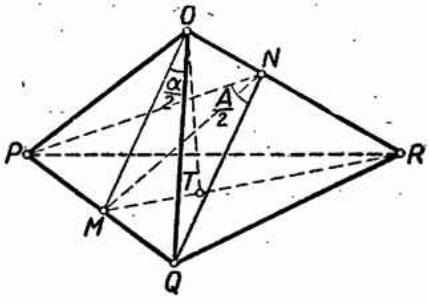


Рис. 42

следовательно,

$$\frac{V_п}{V_ш} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{1 - 2\cos A}{1 + \cos A} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{1 - 2\cos\frac{7\pi}{15}}{1 + \cos\frac{7\pi}{15}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{1 + 2\cos\frac{8\pi}{15}}{1 - \cos\frac{8\pi}{15}} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{1 + 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)}{1 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{10+2\sqrt{5}-2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{7-\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{(10+2\sqrt{5}-2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}})(7-\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{8(3-\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{15-\sqrt{5}-3\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{32\pi}(15-\sqrt{5}-$$

$$-3\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}})(3+\sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{3}}{32\pi}[40+12\sqrt{5}-$$

$$-3\sqrt{3}(3+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}].$$

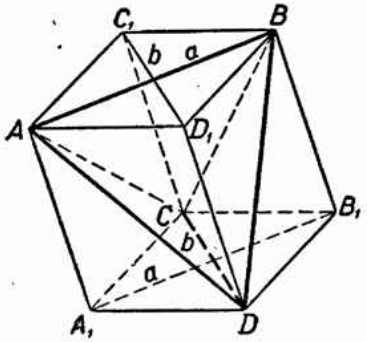


Рис. 43

Замечание 1. При решении этой задачи была использована следующая формула для объема произвольной четырехгранной пирамиды:

$$V = \frac{1}{6} abc \sin\varphi,$$

где a и b — длины двух (любых) ее скрещивающихся ребер, c и φ — соответственно, кратчайшее расстояние и угол между ними. Вывести эту формулу можно, например, так: пусть AB и CD — два скрещивающихся ребра пирамиды $ABCD$ ($AB = a$, $CD = b$). Построим отрезок A_1B_1, равный и параллельный отрезку AB, середина которого совпадает с серединой отрезка CD. Построим отрезок C_1D_1, равный и параллельный отрезку CD, середина которого совпадает с серединой отрезка AB (рис. 43). Параллелограмм AC_1BD_1 получается переносом параллелограмма A_1CB_1D. Эти два параллелограмма служат основаниями параллелепипеда; ребра данной пирамиды являются диагоналями граней этого параллелепипеда (такой параллелепипед называют иногда описанным около данной пирамиды).

Объем параллелепипеда, описанного около данной пирамиды, равен:

$$\frac{1}{2} ab \sin\varphi \cdot c,$$

так как $\frac{1}{2} ab \sin\varphi$ есть площадь его основания A_1CB_1D, а c — высота, являющаяся в то же время кратчайшим расстоянием между AB и CD.

Данная пирамида получается из описанного около нее параллелепипеда, если от него отсечь 4 пирамиды:

$$A_1ACD,\ B_1BCD,\ C_1CAB \text{ и } D_1DAB.$$

Объем каждой из этих пирамид равен $\frac{1}{6}$ объема описанного параллелепипеда, значит, объем пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{3}$ объема описанного параллелепипеда, т. е.

$$\frac{1}{6}\,abc\sin\varphi.$$

Конечно, можно было обойтись и без этой формулы, установив, например, связь между A и α (черт. 42):

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{MQ}{QN}=\frac{\frac{MQ}{OQ}}{\frac{QN}{OQ}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Зная $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$, можно выразить сторону $a=PQ$ треугольника PQR через A, найти пл. $\triangle PQR$ и т. д.

Замечание 2. При вычислении $\cos A$ была использована формула:

$$\cos 36^\circ=\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Вывести ее можно, например, так:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{10}}\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}}\left(\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

значит, $\cos\frac{\pi}{5}$ и $-\cos\frac{2\pi}{5}$ являются корнями квадратного уравнения:

$$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$$

или

$$4x^2 - 2x - 1 = 0;$$

при этом $\cos\frac{\pi}{5}$ — положительный корень этого уравнения, а $-\cos\frac{2\pi}{5}$ — отрицательный:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$-\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Заметим, что так как $\frac{\pi}{5} = 36°$, а $\frac{2\pi}{5} = 72°$ и $\cos 72° = \sin 18°$, то

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Или иначе:

$$\sin(2 \cdot 18°) = \cos(3 \cdot 18°),$$
$$2 \sin 18° \cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°,$$
$$2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3,$$
$$2\sin 18° = 1 - 4\sin^2 18°,$$
$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0,$$

и так как $\sin 18° > 0$, то

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Отсюда

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Вариант 2

1. Область определения функции

$$\log_{\sqrt{x}} a \left|\log_a \frac{x}{2}\right| - \log_{a^2} 2 \cdot \log_{\sqrt{x}} a^2 + \log_a \sqrt{x}$$

такова:

$$0 < x \neq 1,\ 0 < a \neq 1.$$

Выполним, считая, что $0 < a \neq 1$ и $0 < x \neq 1$, эквивалентные преобразования данного уравнения:

$$\log_x a \log_{\sqrt{x}} x \left|\log_a \frac{x}{2}\right| - \log_{\sqrt{x}} 2 + \frac{1}{2}\log_a x = 0,$$

$$\frac{2}{\log_a x}\left|\log_a \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{\log_2 \sqrt{x}} + \frac{1}{2}\log_a x = 0,$$

$$\frac{2}{\log_a x}\left|\log_a \frac{x}{2}\right| - \frac{2}{\log_2 x} + \frac{1}{2}\log_a x = 0,$$

$$\frac{2}{\log_a x}\left|\log_a \frac{x}{2}\right| - \frac{2}{\log_a x \cdot \log_2 a} + \frac{1}{2}\log_a x = 0,$$

$$4\left|\log_a \frac{x}{2}\right| - 4\log_a 2 + \log_a^2 x = 0,$$

$$\log_a^2 x + 4|\log_a x - \log_a 2| - 4\log_a 2 = 0. \qquad (1)$$

1°. $\log_a x < \log_a 2$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\log_a^2 x - 4\log_a x = 0,$$

откуда ($\log_a x \neq 0$):

$$\log_a x = 4, \text{ т. е. } x = a^4.$$

Неравенство $\log_a x < \log_a 2$ принимает вид:

$$\log_a a^4 < \log_a 2.$$

Если $a > 1$, то оно выполняется только при условии $a^4 < 2$, т. е. $x = a^4$ — корень, если $1 < a < \sqrt[4]{2}$.

Если же $0 < a < 1$, то $a^4 > 2$ — эта система неравенств противоречива.

2°. $\log_a x \geqslant \log_a 2$.

Уравнение (1) принимает вид:

$$\log_a^2 x + 4\log_a x - 8\log_a 2 = 0; \qquad (2)$$

его дискриминант

$$\Delta = 4 + 8\log_a 2.$$

Из условия $\Delta \geqslant 0$ находим:

$$1 + \frac{2}{\log_2 a} \geqslant 0,$$

$$\frac{2 + \log_2 a}{\log_2 a} \geqslant 0,$$

т. е. или $\log_2 a \leqslant -2$, или $\log_2 a > 0$, значит, или $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, или $a > 1$.

Если $a = \frac{1}{4}$, то $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$, $\log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}$ и условие $\log_a x \geqslant \log_a 2$ не выполняется. Будем поэтому считать, что или $0 < a < \frac{1}{4}$, или $a > 1$.

Уравнение (2) имеет корень $\log_a x = \log_a 2$ только тогда, когда

$$\log_a^2 2 + 4 \log_a 2 - 8 \log_a 2 = 0,$$

т. е. при $\log_a 2 = 4$, откуда $a = \sqrt[4]{2}$.
При этом значении a уравнение (2) примет вид:

$$\log^2_{\sqrt[4]{2}} x + 4 \log_{\sqrt[4]{2}} x - 32 = 0,$$

$$\log_{\sqrt[4]{2}} x = 4, \quad \log_{\sqrt[4]{2}} x = -8,$$

$$x = 2, \; x = \frac{1}{4}.$$

Неравенство $\log_{\sqrt[4]{2}} x \geqslant \log_{\sqrt[4]{2}} 2$ выполняется из этих значений x только для $x = 2$.

Уравнение (2) имеет оба корня $\log_a x$, больших $\log_a 2$, только тогда, когда

$$\log_a^2 2 + 4 \log_a 2 - 8 \log_a 2 > 0,$$

$$2 \log_a 2 + 4 < 0;$$

отсюда

$$\log_a 2 < -2 = \log_a a^{-2}.$$

Если $0 < a < \frac{1}{4}$, то $a^{-2} < 2$, $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ — получаем несовместную систему неравенств.

Если же $a > 1$, то $a^{-2} > 2$, $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — опять несовместная система неравенств.

Уравнение (2) имеет один корень больший $\log_a 2$, а другой — меньший $\log_a 2$, при условии:

$$\log^2_a 2 - 4 \log_a 2 < 0,$$

т. е.

$$0 < \log_a 2 < 4.$$

Неравенство $\log_a 2 > 0$ выполнено, если $a > 1$, и не выполнено, если $0 < a < \frac{1}{4}$. Неравенство $\log_a 2 < 4 = \log_a a^4$ при условии $a > 1$ эквивалентно такому: $a^4 > 2$, т. е. $a > \sqrt[4]{2}$. Итак, при условии $a > \sqrt[4]{2}$ уравнение (2) в случае 2° имеет только один корень:

$$x = a^{-2+2\sqrt{1+2\log_a^2}}.$$

Итак,

$1 < a < \sqrt[4]{2}$	$x = a^4$
$a = \sqrt[4]{2}$	$x = 2$
$a > \sqrt[4]{2}$	$x = a^{-2+2\sqrt{1+2\log_a 2}}$

Если $0 < a < 1$, то уравнение не имеет корней.

2. Сначала количество пассажиров будет убывать: после первой остановки на 45 человек, после второй на 35 человек, после третьей на 25 человек, после четвертой на 15 человек, после пятой на 5 человек. Таким образом, после пяти остановок в поезде будет $462 - 125 = 337$ человек. После шестой остановки количество пассажиров увеличится на 5 человек, после седьмой — на 15 и т. д., так что минимальное число пассажиров, которое может прибыть в пункт B, равно 337 — и это в том случае, если *между* A и B имеется 5 остановок.

3. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\varphi = \sin^2(t+x) + \sin(t+y) + \sin(t+2x-y) + \frac{1}{4} =$$

$$= \sin^2(t+x) + 2\sin(t+x)\cos(x-y) + \frac{1}{4} =$$

$$= [\sin(t+x) + \cos(x-y)]^2 + \frac{1}{4} - \cos^2(x-y).$$

Каковы бы ни были x и y, всегда найдется значение t, при котором

$$\sin(t+x) + \cos(x-y) = 0,$$

например при $t = \frac{3\pi}{2} - y$.

Значит, $\varphi > 0$ (при всех значениях t) при тех и только при тех значениях x и y, при которых

$$\frac{1}{4} - \cos^2(x-y) > 0,$$

или

$$\cos^2(x-y) < \frac{1}{4},$$

или

$$-\frac{1}{2} < \cos(x-y) < \frac{1}{2},$$

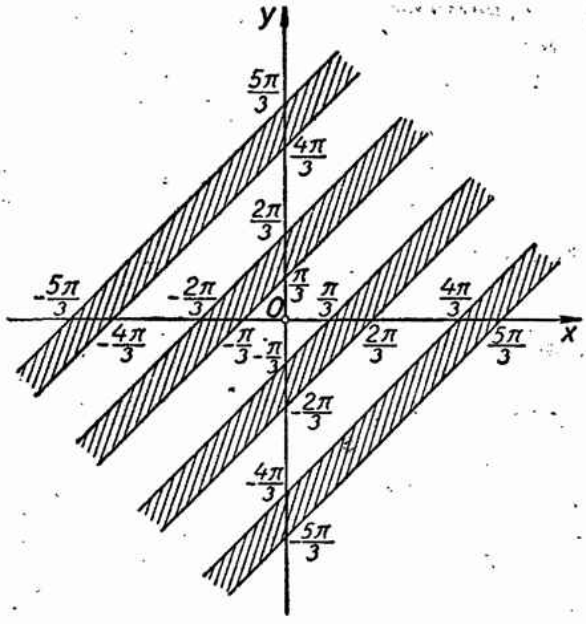


Рис. 44

откуда

$$k\pi + \frac{\pi}{3} < x - y < k\pi + \frac{2\pi}{3},$$

где k принимает все целые значения.

На координатной плоскости множество всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют этим неравенствам, состоит из всех точек, лежащих внутри любой полосы, образованной двумя параллельными прямыми:

$$x - y = k\pi + \frac{\pi}{3},$$

$$x - y = k\pi + \frac{2\pi}{3};$$

k — любое целое число (рис. 44).

4. Пусть O — вершина, а $ABCD$ — основание данной пирамиды. Из условия задачи находим апофему боковой грани: $OM = \frac{3}{2}$ и длину бокового ребра: $OD = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Проведем через прямую AC плоскость, перпендикулярную ребру OD (это возможно, так как $AC \perp OD$), и пусть эта плоскость пересечет ребро OD в точке K (рис. 45).

Полагая $KC = x$, находим:

$$x \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1,$$

откуда

$$KC = x = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Далее находим $\left(TC = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$TK = \sqrt{\frac{9}{10} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

и, полагая $\angle AKC = \gamma$, имеем:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{2}{3},$$

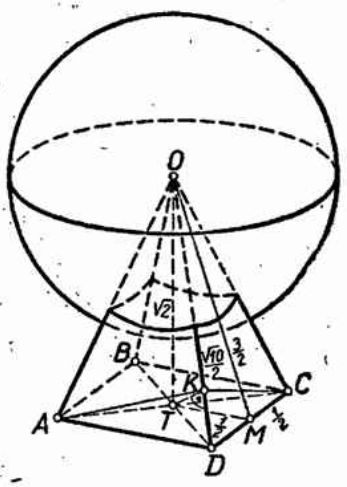


Рис. 45

следовательно,

$$\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Теперь найдем внутренние двугранные углы $\alpha = \beta$ пирамиды $OACD$ с ребрами OC и OA. Имеем:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\text{пл. } \triangle OCT}{\text{пл. } \triangle OCD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Обозначим через s_0 площадь части данной сферы, вырезаемой из нее четырехгранным углом с ребрами OA, OB, OC, OD. Половина этой площади равна площади сферического треугольника, вырезаемого из данной сферы трехгранным углом с ребрами OA, OC, OD. На основании формулы для площади сферического треугольника (см. решение задачи № 4 варианта 1, стр. 178) имеем:

$$\frac{s_0}{2} = 2\arccos\frac{2}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{9}\right) - \pi.$$

Но

$$2\arccos\frac{2}{3} = \arccos\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\right] = \arccos\left(-\frac{1}{9}\right),$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{9},$$

следовательно,

$$\frac{s_0}{2} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{9} = \pi - \arccos\left(2 \cdot \frac{1}{81} - 1\right) =$$

$$= \pi - \arccos\left(-\frac{79}{81}\right) = \arccos \frac{79}{81}$$

и, значит,

$$s_0 = 2 \arccos \frac{79}{81}.$$

Обозначим через s поверхность данной сферы, через v_0 объем части сферы, находящейся внутри данной пирамиды, а через v объем данного шара. Тогда

$$\frac{s_0}{s} = \frac{v_0}{v},$$

и так как

$$s = 4\pi, \quad v = \frac{4}{3}\pi,$$

то

$$v_0 = \frac{s_0}{3} = \frac{2}{3} \arccos \frac{79}{81}.$$

Объем данной пирамиды равен:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

значит, искомое отношение равно:

$$\frac{V - v_0}{v_0} = \frac{V}{v_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} \arccos \frac{79}{81}} - 1.$$

Вариант 3

1. Перепишем данное уравнение в виде:

$$\varphi = \log_{100} x^2 - \log_{\sqrt{x}} 10 \left(\lg 10a - \left| \lg \frac{x}{a} \right|\right) = 0. \qquad (1)$$

Область D определения функции φ от двух аргументов a и x такова:

$$a > 0, \ 0 < x \neq 1.$$

Уравнение (1) эквивалентно следующему:

$$\frac{\lg x^2}{\lg 100} - \frac{1}{\frac{1}{2} \lg x}\left(1 + \lg a - \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right) = 0$$

или

$$\varphi = \lg x - \frac{2}{\lg x}\left(1 + \lg a - \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right) = 0. \qquad (2)$$

Умножая левую часть уравнения (2) на $\lg x$, получим уравнение:

$$\psi = \lg^2 x - 2\left(1 + \lg a - \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right) = 0. \qquad (3)$$

Область D_1 определения функции ψ такова:

$$x > 0,\ a > 0.$$

Ясно, что все корни уравнения $\varphi = 0$ являются также и корнями уравнения $\psi = 0$.

Уравнение $\varphi = 0$ следует из уравнения $\psi = 0$, если $x = 1$ не является корнем уравнения $\psi = 0$. Подставляя в левую часть уравнения (3) $x = 1$, получим:

$$1 + \lg a - |\lg a| = 0.$$

Если $a \geqslant 1$, то это соотношение не выполняется; если же $0 < a < 1$, то оно принимает вид:

$$2 \lg a + 1 = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Итак, при $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$ уравнение (3) имеет корень $x = 1$, не являющийся корнем данного уравнения.

При $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$ уравнение (3) принимает вид:

$$\lg^2 x - 2\left(\frac{1}{2} - \left|\lg x + \frac{1}{2}\right|\right) = 0$$

или

$$\lg^2 x - 1 + 2\left|\lg x + \frac{1}{2}\right| = 0. \qquad (4)$$

Если $\lg x \geqslant -\frac{1}{2}$, то $\lg^2 x + 2 \lg x = 0$;

отсюда $\lg x = 0$, $x = 1$ — не корень данного уравнения, или $\lg x = -2$, что не удовлетворяет условию $\lg x \geqslant -\frac{1}{2}$.

Если же $\lg x < -\frac{1}{2}$, то уравнение (4) принимает вид:

$$\lg^2 x - 2 \lg x - 2 = 0,$$

откуда

$$\lg x = 1 \pm \sqrt{3},$$

и так как только $1 - \sqrt{3} < -\frac{1}{2}$, то $x = 10^{1-\sqrt{3}}$ — корень данного уравнения при $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Итак, случай $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$ исследован. Будем считать, что $0 < a \neq \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x > 0$, и в этих предположениях решать уравнение (3).

Случай I. $x \geqslant a$ или $\lg x \geqslant \lg a$; тогда уравнение (3) примет вид:

$$\lg^2 x - 2 - 2 \lg a + 2 \lg x - 2 \lg a = 0$$

или

$$f(\lg x) = \lg^2 x + 2 \lg x - 2 - 4 \lg a = 0. \qquad (5)$$

Дискриминант этого уравнения

$$\Delta = 3 + 4 \lg a.$$

Условие $\Delta \geqslant 0$ действительности корней дает:

$$\lg a \geqslant -\frac{3}{4}.$$

Если $\lg a = -\frac{3}{4}$, то $\Delta = 0$ и $\lg x = -1$; условие $\lg x \geqslant \lg a$ не выполняется. Поэтому будем считать, что $\lg a > -\frac{3}{4}$. При этом условии корни уравнения (5) относительно $\lg x$ действительны и различны; $\lg x = \lg a$ является корнем уравнения (5) тогда и только тогда, когда

$$\lg^2 a - 2 \lg a - 2 = 0,$$

т. е.

$$\lg a = 1 \pm \sqrt{3}.$$

При $\lg a = 1 - \sqrt{3}$ уравнение (5) принимает вид:

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 6 + 4\sqrt{3} = 0,$$

откуда

$$\lg x = -1 \pm \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = -1 \pm (2 - \sqrt{3});$$

$$\lg x = 1 - \sqrt{3}, \quad \lg x = -3 + \sqrt{3}.$$

Так как $\lg x = -3 + \sqrt{3} < \lg a = 1 - \sqrt{3}$, то $x = 10^{-3+\sqrt{3}}$ не является корнем уравнения (3) таким, что $\lg x \geqslant \lg a$.

Аналогично, если $\lg a = 1 + \sqrt{3}$, имеем:

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 6 - 4\sqrt{3} = 0,$$
$$\lg x = 1 + \sqrt{3}, \quad \lg x = -3 - \sqrt{3},$$
$$\lg x = -3 - \sqrt{3} < \lg a = 1 + \sqrt{3}.$$

Таким образом, если $a = 10^{1-\sqrt{3}}$, то $x = 10^{1-\sqrt{3}}$, а если $a = 10^{1+\sqrt{3}}$, то $x = 10^{1+\sqrt{3}}$.

Будем считать, что

$$a > 10^{-\frac{3}{4}}, \quad a \neq 10^{1-\sqrt{3}}, \quad a \neq 10^{1+\sqrt{3}}, \quad a \neq \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда корни уравнения (5) относительно $\lg x$ действительны, различны и ни один из них не равен $\lg a$. Уравнение (5) имеет в случае I корни только тогда, когда: 1) оба корня уравнения (5) относительно $\lg x$ больше $\lg a$; это будет тогда и только тогда, когда

$$a > 10^{-\frac{3}{4}} \text{ и}$$
$$f(\lg a) > 0,$$
$$2 \lg a + 2 < 0;$$

однако условие $\lg a < -1$ противоречит условию действительности корней ($\lg a = -1 < -\frac{3}{4}$).

Число $\lg a$ будет заключено между корнями уравнения (5) (относительно $\lg x$) тогда и только тогда, когда

$$f(\lg a) < 0,$$

т. е.

$$\lg^2 a - 2 \lg a - 2 < 0,$$

т. е.

$$1 - \sqrt{3} < \lg a < 1 + \sqrt{3};$$

иначе,

$$10^{1-\sqrt{3}} < a < 10^{1+\sqrt{3}}.$$

В этом случае, если $a \neq \frac{1}{\sqrt{10}}$, корнем данного уравнения будет больший корень:

$$\lg x = \sqrt{3 + 4 \lg a} - 1, \qquad x = 10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}.$$

Случай II. $x < a$ или $\lg x < \lg a$.

Уравнение (3) принимает вид:

$$\lg^2 x - 2 - 2 \lg a - 2 \lg x + 2 \lg a = 0$$

или

$$\lg^2 x - 2\lg x - 2 = 0,$$

откуда $\lg x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Значит, если $\lg a \leqslant 1 - \sqrt{3}$, то данное уравнение не имеет корней, меньших a. Если $1 - \sqrt{3} < \lg a \leqslant 1 + \sqrt{3}$, или $10^{1-\sqrt{3}} < a \leqslant 10^{1+\sqrt{3}}$, то $x = 10^{1-\sqrt{3}}$, а если $\lg a > 1 + \sqrt{3}$, т. е. $a > 10^{1+\sqrt{3}}$, то $x = 10^{1-\sqrt{3}}$ и $x = 10^{1+\sqrt{3}}$.
Итог дан в следующей таблице:

$a < 10^{1-\sqrt{3}}$	Корней нет
$a = 10^{1-\sqrt{3}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$
$10^{1-\sqrt{3}} < a < 10^{-\frac{1}{2}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}$
$a = 10^{-\frac{1}{2}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$
$10^{-\frac{1}{2}} < a < 10^{1+\sqrt{3}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}$
$a = 10^{1+\sqrt{3}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{1+\sqrt{3}}$
$a > 10^{1+\sqrt{3}}$	$x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{1+\sqrt{3}}$

2. Строительство одного дома в соответствии с условием задачи выражается формулой (в рублях):

$$184800 = p \cdot 1600 \cdot 40 + q \cdot 40; \qquad (1)$$

при этом

$$p \cdot 1600 \cdot 40 = \frac{32}{100} \cdot 40 \cdot q$$

или

$$q = 5000p. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), получим:

$$p = \frac{7}{10}, \qquad q = 3500.$$

Строительство $\frac{40000}{N}$ домов обходится в сумму, равную

$$s = \frac{40\,000}{N}\left(\frac{7}{10}N\sqrt{N} + 3500\sqrt{N}\right) = 40000\left(\frac{7}{10}\sqrt{N} + \frac{3500}{\sqrt{N}}\right) =$$

$$= 280000\left(\frac{\sqrt{N}}{10} + \frac{500}{\sqrt{N}}\right).$$

Функция $\frac{\sqrt{N}}{10} + \frac{500}{\sqrt{N}} = \left(\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{10}} - \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt[4]{N}}\right)^2 + 2\sqrt{50}$

(при условии $N > 0$) принимает наименьшее значение при

$$\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{10}} - \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt[4]{N}} = 0,$$

т. е. при $N = 5000$. Значит, сумма затрат будет наименьшей ($2800\sqrt{2}$ тысяч рублей), если построить 8 домов.

3. Преобразуем неравенство

$$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2 > 1$$

следующим образом:

$$2 - 4\sin^2 t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x+y) - \sin^2 2x + 2\sin 2x - 1 > 1$$

или

$$4\sin^2 t - 4\sin 2x \sin t - 2\sin(x+y) + \sin^2 2x - 2\sin 2x < 0,$$

или

$$2[\sin(x+y) + \sin 2x] - (2\sin t - \sin 2x)^2 > 0.$$

Если

$$\sin(x+y) + \sin 2x \leqslant 0,$$

то левая часть последнего равенства не положительна при всех действительных значениях t.

Если же

$$\sin(x+y) + \sin 2x > 0,$$

то, например, при

$$t = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

имеем:

$$2[\sin(x+y) + \sin 2x] - (2\sin t - \sin 2x)^2 = 2[\sin(x+y) + \sin 2x] > 0.$$

Итак, координаты x, y всех точек, удовлетворяющих условию задачи, находятся решением неравенства

$$\sin(x+y)+\sin 2x>0$$

или

$$\sin\frac{3x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}>0. \qquad (1)$$

Решим это неравенство преобразованием системы координат (можно было бы этого и не делать, а исследовать, как и в аналогичных задачах предыдущих вариантов, знаки $\sin\frac{3x+y}{2}$ и $\cos\frac{y-x}{2}$.

Положим

$$\begin{aligned}\frac{3x+y}{2}&=\pi+\pi X,\\ \frac{x-y}{2}&=-\frac{\pi}{2}-\pi Y.\end{aligned} \qquad (2)$$

Найдем старые координаты нового начала координат O'.

Полагая в формулах (2) $X=Y=0$, получим:

$$\begin{aligned}3x+y&=2\pi,\\ x-y&=-\pi,\end{aligned}$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{4},\quad y=\frac{5\pi}{4}$$

— таковы старые координаты нового начала координат.

Формулы преобразования координат масштабных векторов имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{3x+y}{2}&=\pi X,\\ \frac{x-y}{2}&=-\pi Y.\end{aligned} \qquad (3)$$

Полагая здесь $X=1$, $Y=0$, из уравнений

$$\begin{aligned}3x+y&=2\pi,\\ x-y&=0\end{aligned}$$

находим:

$$x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}$$

— таковы старые координаты нового масштабного вектора e_1 новой оси $O'X$.

Полагая в формулах (3) $X=0$, $Y=1$, из уравнений

$$\begin{aligned}3x+y&=0,\\ x-y&=-2\pi\end{aligned}$$

находим:

$x = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$

— таковы старые координаты нового масштабного вектора e_2 новой оси $O'Y$.

Неравенство (1) принимает вид:

$$\sin \pi X \cdot \sin \pi Y > 0.$$

Все его решения:

$$2k < X < 2k + 1,$$

$$2s < Y < 2s+1,$$

и

$$2n-1 < X < 2n,$$

$$2m - 1 < Y < 2m,$$

где k, s, n и m — любые целые числа. При $k = s = 0$ получаем множество точек (X, Y), лежащих внутри масштабного параллелограмма $O'E_1EE_2$ (рис. 46). Множество всех точек плоскости, для координат любой из которых выполняется данное неравенство, состоит из всех внутренних точек всех параллелограммов, полученных всеми переносами:

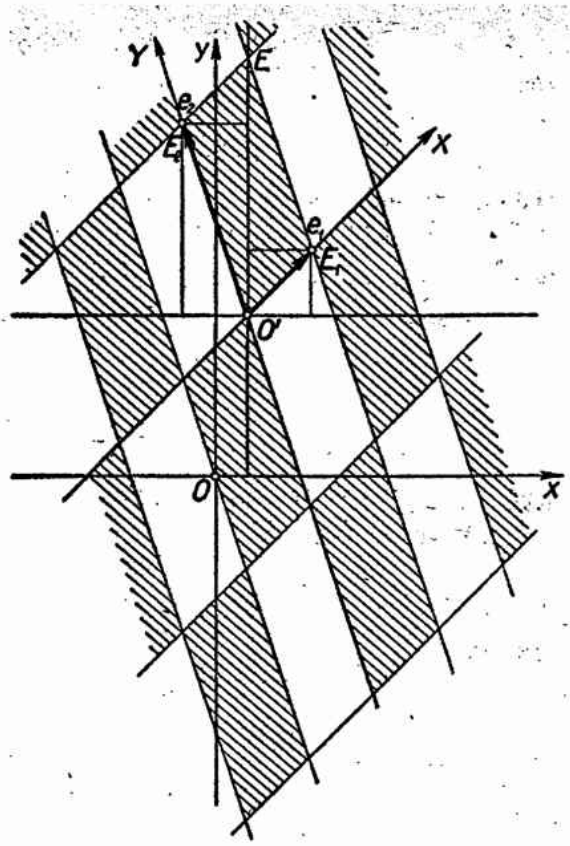


Рис. 46

$$X' = X + p,\ Y' = Y + q,$$

где p и q — любые целые числа, причем $|p|$ и $|q|$ одинаковой четности (рис. 46).

4. Пусть радиус данного шара равен 1; тогда сторона основания данной пирамиды $OABC$ также равна 1 (рис. 47).

Пусть $OT = h$ высота пирамиды. Ее объем равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} h;$$

объем данного шара равен $\frac{4}{3}\pi$. По условию задачи

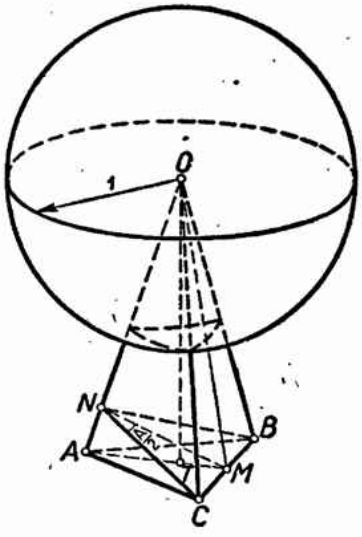


Рис. 47

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}h}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{16\pi},$$

откуда

$$h = \sqrt{3}.$$

Таким образом, объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{4}.$$

Проведем через прямую BC плоскость, перпендикулярную ребру OA, и пусть эта плоскость пересечет ребро OA в точке N.

Пусть M — середина BC. Так как

$$OA = l = \sqrt{AT^2 + OT^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 3} = \sqrt{\frac{10}{3}},$$

а апофема

$$OM = \sqrt{\frac{1}{12} + 3} = \sqrt{\frac{37}{12}},$$

то из равенства

$$CN \cdot OA = OM \cdot CB$$

или

$$CN \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{37}{12}} \cdot 1$$

находим:

$$CN = \sqrt{\frac{37}{40}};$$

значит, обозначая внутренний двугранный угол пирамиды, прилежащий к ребру OA, через A, будем иметь:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{CM}{CN} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{37}{40}}} = \sqrt{\frac{10}{37}},$$

откуда

$$A = 2\arcsin\sqrt{\frac{10}{37}}.$$

Применяя теперь формулу для суммы внутренних двугранных углов трехгранного угла (см. решение задачи № 4, вариант 1, стр. 178), будем иметь:

$$6\arcsin\sqrt{\frac{10}{37}} - \pi = s_0,$$

где s_0— площадь сферического треугольника, вырезаемого из данной сферы гранями трехгранного угла с ребрами OA, OB и OC.

Пусть v_0 — объем части шара, находящейся внутри пирамиды. Тогда

$$\frac{v_0}{s_0} = \frac{v}{s},$$

где $v = \frac{4}{3}\pi$ — объем шара, а $s = 4\pi$ — его поверхность.

Таким образом,

$$\frac{v_0}{s_0} = \frac{1}{3}$$

и, значит,

$$v_0 = \frac{s_0}{3}.$$

Объем части пирамиды, лежащей вне сферы, равен $V - v_0$. Искомое отношение:

$$\frac{V - v_0}{v_0} = \frac{V}{v_0} - 1 = \frac{\frac{1}{4}}{2\arcsin\sqrt{\frac{10}{37}} - \frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{8\arcsin\sqrt{\frac{10}{37}} - \frac{4}{3}\pi} - 1.$$

Вариант 4

1. Область D определения функции

$$\varphi = \log_a x + \log_{\sqrt{x}} a\,|a + \log_a x| - a\log_x a$$

такова: $0 < x \neq 1$, $0 < a \neq 1$. Данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\log_a x + \frac{2}{\log_a x}|a + \log_a x| - \frac{a}{\log_a x} = 0,$$

а это уравнение эквивалентно такому:

$$\log_a^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0. \qquad (1)$$

В самом деле, $x = 1$ не является корнем этого уравнения, так как при $x = 1$ левая часть обращается в $2|a| - a$; но это выражение равно нулю только при $a = 0$.

Случай I. $a + \log_a x \geqslant 0$.

Уравнение (1) принимает вид:

$$\log^2_a x + 2\log_a x + a = 0 \tag{2}$$

или

$$u^2 + 2u + a = 0, \tag{3}$$

где $u = \log_a x$. Дискриминант уравнения (3) равен:

$$\Delta = 1 - a.$$

Из условия $\Delta \geqslant 0$ находим $1 - a \geqslant 0$, $a \leqslant 1$. Итак, корни уравнения (3) действительны и различны тогда и только тогда, когда $0 < a < 1$. В рассматриваемом случае $u \geqslant -a$.

Число $u = -a$ является корнем уравнения (3) только тогда, когда $a^2 - 2a + a = 0$, откуда $a = 0$ и $a = 1$ — эти значения a исключены.

Итак, надо исследовать, при каком условии уравнение (3) имеет корни $u > -a$.

Пусть u_1 и u_2 — корни уравнения (3). Неравенства $-a < u_1 < u_2$ будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a^2 - a &> 0, \\ -2a + 2 &< 0, \end{aligned}$$

откуда $a > 1$, что противоречит условию $0 < a < 1$ ($\Delta > 0$). Число $-a$ будет заключено между u_1 и u_2 только тогда, когда

$$a^2 - a < 0,$$

т. е. $0 < a < 1$. Итак, если $0 < a < 1$, то имеется только один корень уравнения (3), больший $-a$:

$$\begin{aligned} u = \log_a x &= \sqrt{1-a} - 1, \\ x &= a^{\sqrt{1-a}-1}. \end{aligned}$$

Случай II. $a + \log_a x < 0$.

В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$\log^2_a x - 2\log_a x - 3a = 0. \tag{4}$$

Так как $a > 0$, то корни его действительны и различны. Полагая $\log_a x = v$, получим:

$$v^2 - 2v - 3a = 0. \tag{5}$$

Пусть v_1 и v_2 — корни этого уравнения ($v_1 < v_2$). Неравенство $a + \log_a x < 0$ принимает вид: $v < -a$. Неравенства $v_1 < v_2 < -a$ выполняются тогда и только тогда, когда

$$a^2 + 2a - 3a > 0,$$
$$-2a - 2 > 0,$$

откуда $a < -1$, что не имеет места.

Неравенства $v_1 < -a < v_2$ выполняются только тогда, когда

$$a^2 - a < 0,$$

т. е. $0 < a < 1$, и в этом случае

$$v = \log_a x = 1 - \sqrt{1 + 3a},$$

откуда

$$x = a^{1-\sqrt{1+3a}}.$$

Итак, данное уравнение имеет два корня:

$$x = a^{\sqrt{1-a}-1} \text{ и } x = a^{1-\sqrt{1+3a}},$$

если $0 < a < 1$. Если же $a > 1$, то уравнение корней не имеет.

2. Если ввести один новый вид продукции, то предприятие будет приносить убыток в 11 тыс. руб. в год; при внедрении в том же году еще одного нового вида продукции предприятие будет приносить убыток в 1 тыс. руб. При внедрении в производство (в том же году) третьего вида продукции доход в 25 тыс. руб. от внедрения этого вида продукции будет по условию задачи компенсирован расходом в те же 25 тыс. руб., так что предприятие опять будет приносить убыток в 1 тыс. руб. Далее, доход (25 тыс. руб.) будет меньше расхода (35 тыс. руб.), и убыток в год вырастет до 11 тыс. руб. и в дальнейшем будет возрастать. Значит, указанным способом можно лишь снизить убыточность в год до 1 тыс. руб., но доходным предприятие сделать нельзя.

3. Преобразуем неравенство

$$\cos(t + 3x + y) - \cos(t + x - y) - \sin^2(t + 2x) - \frac{1}{4} > 0$$

следующим образом:

$$-2\sin(t + 2x)\sin(x + y) - \sin^2(t + 2x) - \frac{1}{4} > 0,$$

$$\sin^2(t + 2x) + 2\sin(t + 2x)\sin(x + y) + \frac{1}{4} < 0,$$

$$[\sin(t + 2x) + \sin(x + y)]^2 + \frac{1}{4} - \sin^2(x + y) < 0.$$

Если $\frac{1}{4} - \sin^2(x + y) \geqslant 0$, то последнее, а следовательно, и данное неравенство не выполняются ни при одном значении t. Если же

$$\frac{1}{4} - \sin^2(x + y) < 0,$$

то последнее неравенство выполняется, например, при $t = -3x-y$. Таким образом, множество всех пар чисел x, y, удовлетворяющих решению задачи, находится из условия:

$$|\sin(x+y)| > \frac{1}{2},$$

или

$$-1 \leqslant \sin(x+y) < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \sin(x+y) \leqslant 1,$$

или

$$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x+y < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$
$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x+y < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; \qquad (1)$$

k и n принимают все целые значения.

Область, образуемая точками $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам (1), состоит из множества всех точек, лежащих внутри полос P_k и Q_n (рис. 48), каждая из которых образована двумя параллельными прямыми. Уравнения прямых, образующих полосу P_k:

$$x+y = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$
$$x+y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

а уравнения прямых, образующих полосу Q_n:

$$x+y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,$$
$$x+y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

4. Если в основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, а ее вершина S проектируется в точку T пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, то все внутренние двугранные углы пирамиды $SABCD$, ребрами которых служат прямые SA, SB, SC и SD, равны между собой. В самом деле, пирамида $SABCD$ симметрична относительно плоскостей, проходящих через прямую ST параллельно сторонам прямоугольника. Таким образом, все внутренние двугранные углы пирамиды $SABCD$, ребрами которых являются боковые ребра этой пирамиды, равны $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Пусть лучи SA, SB, SC, SD пересекают сферу радиуса 1 с центром в точке S соответственно в точках P, Q, R, L. Тогда грани трехгранного угла $SABC$ высекают из сферы сферический треугольник

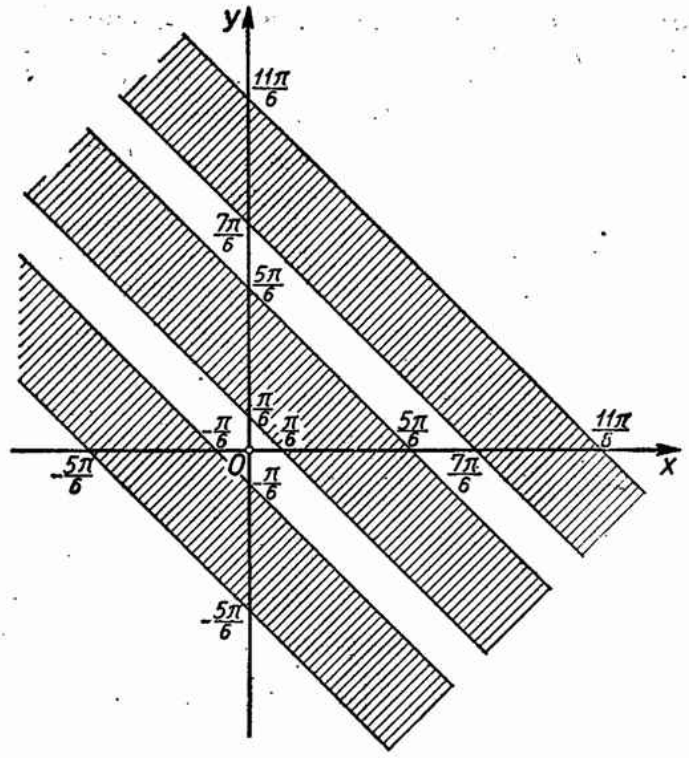


Рис. 48

$P\breve{Q}R$, углы которого обозначим через P_1, Q и R_1, а грани трехгранного угла $SACD$ высекают из той же сферы сферический треугольник $P\breve{R}L$, углы которого обозначим через P_2, R_2, L. На основании формулы, выражающей сумму углов сферического треугольника через его площадь и радиус сферы (см. решение задачи № 4, вариант 1, стр. 178), имеем:

$$P_1 + Q + R_1 - \pi = \frac{s_0}{2},$$

$$P_2 + L + R_2 - \pi = \frac{s_0}{2},$$

где $\frac{s_0}{2}$ = пл. $\breve{PQR}$ = пл. $P\breve{R}L$. Складывая эти равенства, получим:

$$s_0 = P + Q + R + L - 2\pi,$$

и так как $P = Q = R = L = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, то

$$s_0 = 2\sqrt{2}\pi - 2\pi.$$

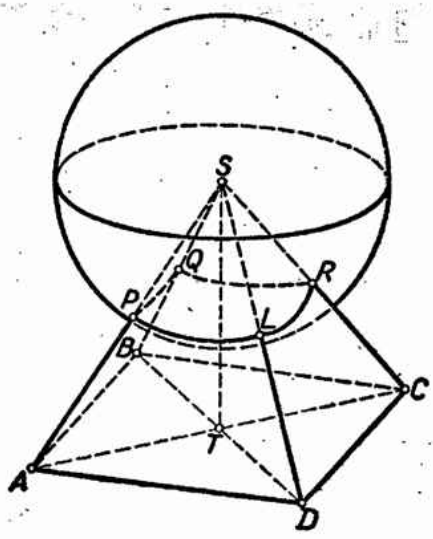


Рис. 49

Теперь из пропорции

$$\frac{s_0}{s} = \frac{v_0}{v},$$

где s — поверхность данной сферы, v_0 — объем той ее части, которая лежит внутри пирамиды, а v — объем данного шара, находим (рис. 49):

$$\frac{2\sqrt{2}\pi - 2\pi}{4\pi} = \frac{v_0}{\frac{4}{3}\pi},$$

откуда

$$v_0 = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Вариант 5

1. Область D определения функции

$$\varphi = \log_{\sqrt{x}} a^2 \left| \log_{a^2} \frac{x}{2} \right| + \log_a x - \log_{a^2} 4 \cdot \log_{\sqrt{x}} a$$

от двух аргументов x и a такова:

$$0 < x \neq 1,\ 0 < a \neq 1.$$

Уравнение $\varphi = 0$ эквивалентно следующему:

$$\frac{4}{\log_a x} \cdot \frac{1}{2} \left| \log_a \frac{x}{2} \right| + \log_a x - \log_a 2 \frac{2}{\log_a x} = 0. \qquad (1)$$

Умножая левую часть этого уравнения на $\log_a x$, получим:

$$\psi = \log_a^2 x + 2 \left| \log_a \frac{x}{2} \right| - \log_a 2 = 0. \qquad (2)$$

Область D_1 определения функции ψ такова:

$$x > 0,\ 0 < a \neq 1.$$

Число $x = 1$ является корнем уравнения $\psi = 0$ только тогда, когда

$$2 \left| \log_a 2 \right| - 2 \log_a 2 = 0,$$

т. е. только при $a > 1$. Значит, если $0 < a < 1$, то уравнения (1) и (2) эквиваленты, а если $a > 1$, то уравнение (2) имеет корень $x = 1$, не являющийся корнем данного уравнения.

Случай I. $\log_a \frac{x}{2} \geqslant 0$ или $\log_a x \geqslant \log_a 2$.

В этом случае уравнение (2) принимает вид:

$$\log_a^2 x + 2\log_a \frac{x}{2} - 2\log_a 2 = 0$$

или

$$\log_a^2 x + 2\log_a x - 4\log_a 2 = 0. \qquad (3)$$

Полагая $\log_a x = u$, получим:

$$u^2 + 2u - 4\log_a 2 = 0. \qquad (4)$$

Необходимое и достаточное условие того, что корни уравнения (4) действительны, имеет вид:

$$\Delta = 1 + 4\log_a 2 \geqslant 0$$

или

$$1 + \frac{4}{\log_2 a} \geqslant 0,$$

откуда или $\log_2 a > 0$, или $\log_2 a \leqslant -4$, т. е. или $a > 1$, или $0 < a \leqslant \frac{1}{16}$.

При $a = \frac{1}{16}$ имеем: $\Delta = 0$, $u_1 = u_2 = -1$, $\log_a x = -1$, $\log_{\frac{1}{16}} 2 = -\frac{1}{4}$, и так как $-1 < -\frac{1}{4}$, то при $a = \frac{1}{16}$ данное уравнение не имеет корней таких, что $\log_a \frac{x}{2} \geqslant 0$.

Далее, уравнение (4) имеет корень $u = \log_2 2$ только при

$$\log_a^2 2 + 2\log_a 2 - 4\log_2 2 = 0,$$

откуда $a = \sqrt{2}$. При $a = \sqrt{2}$ уравнение (4) принимает вид:

$$u^2 + 2u - 8 = 0;$$

его корни:

$$u_1 = 2,\ u_2 = -4.$$

Соответствующие значения x находятся из уравнений:

$$\log_{\sqrt{2}} x = 2, \qquad \log_{\sqrt{2}} x = -4.$$

Заметим, что

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2,$$

так что только $x = (\sqrt{2})^2 = 2$ — корень данного уравнения.

Итак, при $a = \sqrt{2}$ данное уравнение в случае I имеет корень $x = 2$.

Будем считать, что или $1 < a \neq \sqrt{2}$ или $0 < a < \frac{1}{16}$.

Тогда корни u_1 и u_2 уравнения (4) действительны, различны и ни один из них не равен $\log_a 2$.

Неравенства

$$\log_a 2 < u_1 < u_2$$

выполняются только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{c} \log_a^2 2 + 2\log_a 2 - 4\log_a 2 > 0, \\ 2\log_a 2 + 2 < 0 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{c} \log_a 2\,(\log_a 2 - 2) > 0, \\ \log_a 2 + 1 < 0. \end{array}\right\}$$

Отсюда

$$\log_a 2 < -1, \text{ или } \frac{1}{2} < a < 1;$$

эти неравенства противоречат и неравенствам $1 < a \neq \sqrt{2}$ и неравенствам $0 < a < \frac{1}{16}$.

Неравенства

$$u_1 < \log_a 2 < u_2$$

выполняются только тогда, когда

$$\log_a 2\ (\log_a 2 - 2) < 0,$$

т. е.

$$0 < \log_a 2 < 2.$$

Если $1 < a \neq \sqrt{2}$, то отсюда следует, что

$$1 < 2 < a^2,$$

т. е. $a > \sqrt{2}$, а если $a < \frac{1}{16}$, то уже неравенство $0 < \log_a 2$ не выполняется. Итак, если $a > \sqrt{2}$, то данное уравнение (в случае I) имеет корень:

$$x = a^{\sqrt{1+4\log_a 2}-1}$$

Случай II. $\log_a \frac{x}{2} < 0$.

Уравнение (2) принимает вид:

$$\log_a^2 x - 2\log_a x = 0,$$

откуда ($x \neq 1$)

$$x = a^2.$$

Соотношение $\log_a \frac{x}{2} < 0$ принимает вид:

$$\log_a \frac{a^2}{2} < 0,$$

или

$$2 - \log_a 2 < 0,$$

или

$$2 - \frac{1}{\log_2 a} < 0,$$

$$\frac{2\log_2 a - 1}{\log_2 a} < 0,$$

$$0 < \log_2 a < \frac{1}{2},$$

т. е.

$$1 < a < \sqrt{2}.$$

Итак, только при $1 < a < \sqrt{2}$ данное уравнение имеет только один корень $x = a^2$, такой, что $\log_a \frac{x}{2} < 0$.

Итог исследования дан в таблице:

$0 < a < 1$	Корней нет
$1 < a < \sqrt{2}$	$x = a^2$
$a = \sqrt{2}$	$x = 2$
$a > \sqrt{2}$	$x = a^{\sqrt{1+4\log_a 2}-1}$

2. Время T монтажа одного резервуара кубической формы:

$$T = k \cdot 6x^2,$$

где x — ребро куба. При $x = 20$ *см* ($x^3 = 8000$ *см*$^3 = 8$ *л*), $T =$ $= 100$ *сек*, значит,

$$100 = k \cdot 2400,$$

откуда $k = \frac{1}{24}$ и, значит,

$$T = \frac{x^2}{4}.$$

На обработку поверхности $6x^2$ одного резервуара потребуется

$$\frac{6x^2}{10} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10} x^2 \text{сек},$$

а всего на изготовление одного резервуара с ребром x понадобится время:

$$t = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{10}x^2 = \frac{23}{20}x^2 \text{ сек},$$

где x — длина ребра куба в сантиметрах.

Пусть n — количество одинаковых резервуаров кубической формы, общий объем которых равен 64 000 000 $см^3$. Тогда

$$x^3 = \frac{64000000}{n},$$

откуда

$$x = \frac{400}{\sqrt[3]{n}}$$

и, значит,

$$t = \frac{23}{20} \cdot \frac{160000}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{23 \cdot 8000}{\sqrt[3]{n^2}}$$

— время для изготовления одного резервуара. Время для изготовления n резервуаров равно

$$23 \cdot 8000\sqrt[3]{n} \text{ сек},$$

и согласно условию задачи это число секунд должно быть меньше или равно 72000 *сек* (= 20 *ч*):

$$23 \cdot 8000\sqrt[3]{n} \leqslant 72\,000.$$

Отсюда

$$\sqrt[3]{n} \leqslant \frac{9}{23},$$

что не выполняется ни при одном натуральном n.

Таким образом, за 20 *ч* мастерская не успеет изготовить одинаковое количество кубических резервуаров общей емкостью 64 тыс. *л*.

3. Перепишем неравенство

$$\varphi = (2\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y)\cos x \cos y + 1 + \cos x - \cos y + \cos 2t > 0$$

следующим образом:

$$2\cos^2 t + 2\cos x \cos y \cos t + \frac{1}{2}\cos^2 x \cos^2 y + \cos x - \cos y > 0$$

или

$$2(\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y)^2 + \cos x - \cos y > 0.$$

Каковы бы ни были x и y, найдется значение t, например

$$t = \arccos\left(-\frac{1}{2}\cos x \cos y\right),$$

при котором

$$\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y = 0;$$

значит, неравенство $\varphi > 0$ будет выполняться при всех значениях t только тогда, когда

$$\cos x - \cos y > 0, \text{ или } \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} < 0.$$

Имеем: $\sin\frac{x+y}{2} > 0$ только тогда, когда

$$2k\pi < \frac{x+y}{2} < 2k\pi + \pi, \text{ или } 4k\pi < x + y < 4k\pi + 2\pi, \quad (1)$$

и $\sin\frac{x+y}{2} < 0$ только тогда, когда

$$2n\pi - \pi < \frac{x+y}{2} < 2n\pi, \text{ или } 4n\pi - 2\pi < x + y < 4n\pi; \quad (2)$$

в соотношениях (1) и (2) k и n принимают все целые значения. Аналогично, $\sin\frac{x-y}{2} > 0$ только тогда, когда

$$4m\pi < x - y < 4m\pi + 2\pi,$$

и $\sin\frac{x-y}{2} < 0$ только тогда, когда

$$4s\pi - 2\pi < x - y < 4s\pi.$$

Неравенство $\cos x > \cos y$ выполняется только для координат всех внутренних точек всех квадратов Q_{ks} и Q_{mn}, определяемых неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} 4k\pi < x + y < 4k\pi + 2\pi, \\ 4s\pi - 2\pi < x - y < 4s\pi \end{aligned}\right\} \quad (Q_{ks})$$

и

$$\left.\begin{aligned} 4n\pi - 2\pi < x + y < 4n\pi, \\ 4m\pi < x - y < 4m\pi + 2\pi \end{aligned}\right\} \quad (Q_{mn})$$

(рис. 50).

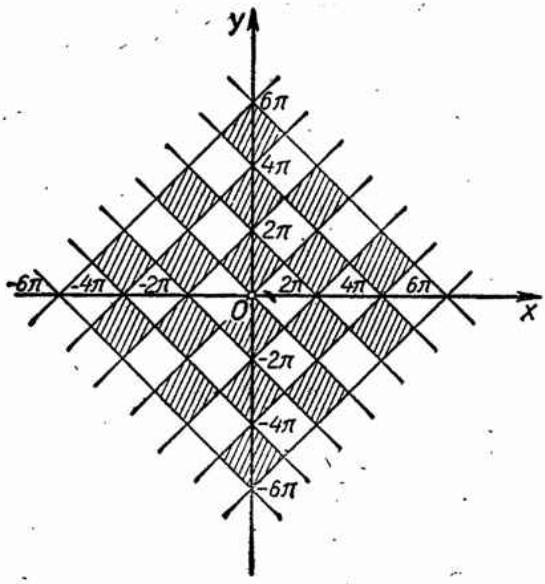


Рис. 50

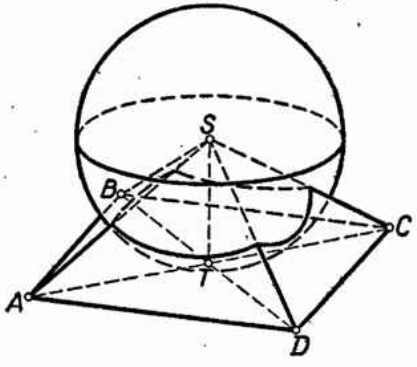


Рис. 51

4. Боковые грани данной пирамиды вырезают из данной сферы криволинейный четырехугольник $P\overset{\smile}{Q}RL$ (рис. 51), который можно разбить на два сферических треугольника $P\overset{\smile}{Q}R$ с углами P_1, Q, R_1 и $P\overset{\smile}{R}L$ с углами P_2, R_2 и L. Применяя формулу, связывающую сумму углов сферического треугольника с его площадью и радиусом сферы, получим:

$$P_1 + Q + R_1 - \pi = \frac{s_0}{2},$$

$$P_2 + R_2 + L - \pi = \frac{s_0}{2},$$

где s_0 — площадь четырехугольника $P\overset{\smile}{Q}RL$ (радиус сферы принимаем равным 1).

Складывая последние равенства, получим

$$P + Q + R + L - 2\pi = s_0 = \frac{2}{7} \cdot 4\pi$$

и так как $P = Q = R = L$, то

$$4P - 2\pi = \frac{8}{7}\pi,$$

откуда

$$P = \frac{11\pi}{14}.$$

Пусть T — проекция точки S на плоскость $ABCD$, а K — проекция точки T на ребро SD. Тогда, обозначая через a сторону основания пирамиды $SABCD$, а через m — апофему боковой грани, имеем:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = CK \sin\frac{P}{2} = CK \sin\frac{11\pi}{28},$$

откуда

$$CK = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{28}}.$$

Из соотношения

$$CK \cdot SD = am$$

находим:

$$\frac{m}{SD} = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{28}}. \qquad (1)$$

Пусть M — середина отрезка CD; тогда из прямоугольного треугольника STM находим:

$$1 + \frac{a^2}{4} = m^2.$$

Но

$$\frac{a}{2} = m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

значит,

$$1 + m^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = m^2,$$

откуда

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}},$$

$$a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Полная поверхность пирамиды:

$$\sigma = 4\cdot\frac{1}{2}am + a^2 = 2am + a^2 =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Из соотношения (1) находим:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{2\sin^2\frac{11\pi}{28}}}=\frac{\sqrt{-\cos\frac{11\pi}{14}}}{\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{28}}$$

и, значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{-\cos\frac{11\pi}{14}}=\sqrt{\cos\frac{3\pi}{14}}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{\sqrt{\cos\frac{3\pi}{14}}}{\pi\left(1-\sqrt{\cos\frac{3\pi}{14}}\right)}.$$

Вариант 6

1. Область D определения функции

$$\varphi=-\log_a x\,|\log_x a-\log_2 a|+\log_x(ax)-\log_2 a^2+\log_a x\log_2 a$$

такова:

$$0<a\neq 1,\ 0<x\neq 1.$$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $\varphi=0$, а уравнение $\varphi=0$ эквивалентно следующему:

$$-\frac{|\log_x a-\log_2 a|}{\log_x a}+\log_x a+1-2\log_2 a+\log_a x\log_2 a=0. \qquad (1)$$

Умножая левую часть этого уравнения на $\log_x a$, получим:

$$\psi=\log^2_x a+(1-2\log_2 a)\log_x a-|\log_x a-\log_2 a|+\log_2 a=0. \qquad (2)$$

Область D_1 определения функции ψ:

$$a>0,\ 0<x\neq 1.$$

При $a = 1$ и $a = 0$ (при *любом* x, таком, что $0 < x \neq 1$); значение $a = 1$ (а значит, $\log_x a = 0$, $\log_2 a = 0$) в дальнейшем исключается из рассмотрения.

Полагая $\log_x a = u$, $\log_2 a = p$, получим:

$$u^2 + (1 - 2p)\, u - |u - p| + p = 0. \qquad (3)$$

Случай I. $u \geqslant p$.

В этом случае уравнение (3) принимает вид:

$$u^2 + (1 - 2p)\, u - (u - p) + p = 0$$

или

$$u^2 - 2pu + 2p = 0. \qquad (4)$$

Корни уравнения (4) действительны только тогда, когда

$$\Delta = p^2 - 2p \geqslant 0,$$

откуда или $p < 0$ (так как $p \neq 0$), или $p \geqslant 2$.

При $p = 2$ уравнение (4) имеет корень $u = 2$, следовательно, при $\log_2 a = 2$, т. е. $a = 4$, данное уравнение имеет корень x, определяемый из уравнения $\log_x 4 = 2$, т. е. $x = 2$. Будем считать, что или $p < 0$, или $p > 2$. Тогда уравнение (4) имеет действительные и различные корни. Число p — его корень только при

$$p^2 - 2p^2 + 2p = 0,$$

т. е. при $p = 0$ и $p = 2$. Значит, если или $p < 0$, или $p > 2$, то корни уравнения (4) действительны, различны и ни один из них не равен p.

Число p не может быть меньше обоих корней u_1 и u_2 уравнения (4), так как тогда (и только тогда) должны быть выполнены неравенства:

$$2p - p^2 > 0, \qquad 2p - 2p < 0.$$

Число p заключено между корнями уравнения (4) только при

$$2p - p^2 < 0,$$

т. е. если или $p < 0$ или $p > 2$; иначе:

$$\text{или } 0 < a < 1 \text{ или } a > 4.$$

При этом

$$\log_x a = u_2 = p + \sqrt{p^2 - 2p} = \log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2 \log_2 a}$$

и, значит,

$$x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2 \log_2 a}}}.$$

Случай II. $u < p$.

В этом случае уравнение (3) принимает вид:

$$u^2 + (1 - 2p)\, u + u - p + p = 0$$

или

$$u^2 + 2(1 - p)u = 0,$$

откуда $(u \neq 0)$ $u = 2(p - 1)$.

Неравенство $u < p$, т. е. $2p - 2 < p$ выполняется при $p < 2$, или $\log_2 a < 2$, т. е. при $a < 4$, а так как $0 < a \neq 1$, то имеем: $0 < a < 1$, $1 < a < 4$. Если выполнено любое из этих неравенств и $a \neq 2$, то данное уравнение имеет корень x, определяемый из уравнения:

$$\log_x a = 2(\log_2 a - 1),$$

т. е. если $a \neq 2$, то

$$x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}.$$

Итог исследований дан в таблице:

$0 < a < 1$	$x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$, $x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2\log_2 a}}}$
$1 < a < 2$	$x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$
$a = 2$	Нет корней
$2 < a < 4$	$x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$
$a = 4$	$x = 2$
$a > 4$	$x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2\log_2 a}}}$

2. Если использовано k автобусов, то затрачено время $t = \lambda \cdot \frac{1}{k} + 4(k - 1)$. При $k = 1$ $t = 121$ *мин*, значит $\lambda = 121$ и $t = \frac{121}{k} + 4(k - 1)$. Неравенство $\frac{121}{k} + 4(k - 1) < 40{,}1$ принимает вид: $f(k) = 4k^2 - 44{,}1k + 121 < 0$. Наименьшее значение функция $f(k)$ принимает при $k = \frac{44{,}1}{8}$, и оно равно $f\left(\frac{44{,}1}{8}\right) = -\frac{8{,}81}{16}$. Так как $5 < \frac{44{,}1}{8} < 6$, то надо вычислить $f(5)$ и $f(6)$: $f(5) = 0{,}5 > 0$, $f(6) = 0{,}4 > 0$. Значит, не существует пути, при котором на дорогу уходит менее 40,1 *мин*.

3. Преобразуем неравенство

$$\sin^2 t \cos^2 x + \cos^2 t \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t + 2(\cos 2x + \cos y) < 0$$

следующим образом:

$$\varphi = \sin^2(t + x) + 2(\cos 2x + \cos y) < 0.$$

Если $\cos 2x + \cos y \geqslant 0$, то не существует ни одного значения t, при котором $\varphi < 0$. Если же $\cos 2x + \cos y < 0$, то при $t = -x$ $\varphi < 0$. Таким образом, множество всех пар чисел x, y, для которых существует хотя бы одно значение t, при котором $\varphi < 0$, определяется условием:

$$\cos 2x + \cos y < 0, \text{ или } \cos\frac{2x+y}{2}\cos\frac{2x-y}{2} < 0. \qquad (1)$$

Преобразуем это неравенство к виду $\sin \pi X \cdot \sin \pi Y > 0$ следующим преобразованием системы координат (и здесь можно было бы не делать этого, а исследовать знаки $\cos\frac{2x+y}{2}$ и $\cos\frac{2x-y}{2}$):

$$\left.\begin{aligned}\frac{2x+y}{2} &= \pi X + \frac{\pi}{2},\\ \frac{2x-y}{2} &= \pi Y - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Старые координаты x, y нового начала координат O' находятся из уравнений: $2x + y = \pi$, $2x - y = -\pi$, откуда $x = 0$, $y = \pi$.

Так как координаты векторов преобразуются по формулам

$$2x + y = 2\pi X, \qquad 2x - y = 2\pi Y,$$

то старые координаты x, y нового масштабного вектора e_1 новой оси $O'X$ находятся из уравнений:

$$2x + y = 2\pi, \qquad 2x - y = 0,$$

откуда

$$e_1 = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

Старые координаты нового масштабного вектора e_2 новой оси $O'Y$ находятся из уравнений:

$$2x + y = 0, \qquad 2x - y = 2\pi,$$

откуда

$$e_2 = \left\{\frac{\pi}{2}, -\pi\right\}.$$

Неравенство (1) принимает вид:

$$\sin \pi X \cdot \sin \pi Y > 0.$$

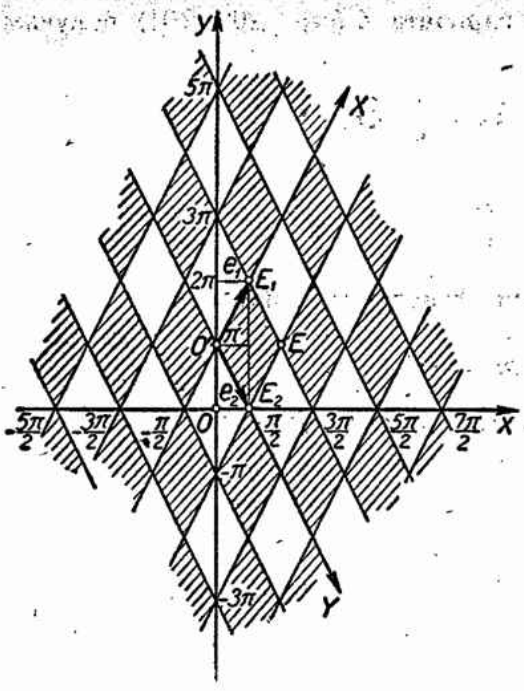


Рис. 52

Все его решения — множество всех внутренних точек всех ромбов L_{ks} и L_{mn}, определяемых неравенствами (рис. 52):

$$\left.\begin{aligned} 2k < X < 2k+1, \\ 2s < Y < 2s+1; \end{aligned}\right\} \quad (L_{ks})$$

$$\left.\begin{aligned} 2m-1 < X < 2m, \\ 2n-1 < Y < 2n \end{aligned}\right\} \quad (L_{mn})$$

(сюда можно, конечно, вместо X и Y подставить их выражения из формул (2); тогда получается система тех неравенств между x и y, которые могли быть получены и без преобразования системы координат исследованием знаков $\cos\frac{2x+y}{2}$ и $\cos\frac{2x-y}{2}$).

Ромб L_{00} ($k = s = 0$):

$$0 < X < 1, \qquad 0 < Y < 1$$

является масштабным $O'E_1EE_2$. Все ромбы, координаты всех внутренних точек любого из которых дают все решения данного неравенства, получаются переносами

$$X' = X + p, \; Y' = Y + q \qquad (3)$$

масштабного ромба L_{00}. В формулах (3) p и q — любые целые числа, причем $|p|$ и $|q|$ имеют одинаковую четность.

4. Если в основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, а ее высота ST проходит через точку T пересечения диагоналей AC и BD, то все двугранные углы $B(SA)D$, $A(SB)C$, $B(SC)D$ и $A(SD)C$ равны между собой. Обозначая через x величину каждого из них и рассуждая так же, как, напри-

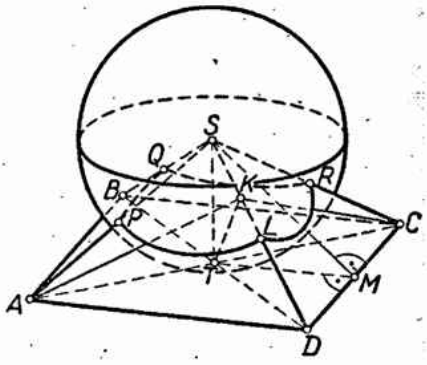


Рис. 53

мер, при решении задачи № 4 варианта 4 (стр. 200, 201) получим (принимаем $ST = 1$):

$$4x - 2\pi = \frac{1}{5} \cdot 4\pi,$$

откуда (рис. 53)

$$x = \frac{7\pi}{10} = 126°.$$

§ 32. Физический факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_{3x^2+1} 2 < \log_{3x^2+1} (3x^2+1)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$2 < \sqrt{3x^2+1}, \qquad x \neq 0,$$

или

$$x^2 > 1,$$

откуда или $x < -1$, или $x > 1$. Таким образом, множество всех решений данного неравенства состоит из двух интервалов: $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

2. Дискриминант квадратного трехчлена

$$x^2 - 2x + 2^{|a|}$$

равен:

$$\Delta = 1 - 2^{|a|},$$

и значит, если $a \neq 0$, то $\Delta < 0$. Поэтому если $a \neq 0$, то $x^2 - 2x + 2^{|a|} > 0$ при всех действительных значениях x. Данное неравенство при $a \neq 0$ эквивалентно следующему:

$$x^2 - a^2 > 0 \qquad \text{или} \qquad x^2 - |a|^2 > 0,$$

откуда или $x < -|a|$, или $x > |a|$.

Если же $a = 0$, то данное неравенство принимает вид:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} > 0,$$

или

$$\frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$$

и выполняется при всех действительных значениях x, кроме $x = 0$ и $x = 1$.

3. Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$5\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x,$$

или

$$5\frac{\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x},$$

или

$$5\,\frac{\cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x}. \qquad (1)$$

Докажем, что это уравнение эквивалентно уравнению, которое мы получим, умножая обе части на $\cos x \cos 2x \sin 3x$, т. е. докажем, что уравнение (1) (следовательно, и данное уравнение) эквивалентно уравнению:

$$5\cos^2 2x = \sin x \sin 3x, \qquad (2)$$

или

$$5\cos^2 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x),$$

или

$$10\cos^2 2x = \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1,$$

или

$$12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0. \qquad (2')$$

В самом деле, уравнение (2) является следствием уравнения (1) (иначе, все корни уравнения (1) являются также и корнями уравнения (2)). Докажем, что и обратно: уравнение (1) является следствием уравнения (2). Для этого достаточно доказать, что если x — любой корень уравнения (2), то $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$ (так как, поделив обе части уравнения (2) на $\cos x \cos 2x \sin 3x$, получим соотношение (1)). Итак, пусть x — любой корень уравнения (2). Если $\cos x = 0$, то $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1$, но это значение $\cos 2x = -1$ не удовлетворяет уравнению (2'). Далее, $\cos 2x = 0$ не удовлетворяет уравнению (2'). Наконец, если $\sin 3x = 0$, то $x = \frac{k\pi}{3}$; при этих значениях x правая часть уравнения (2) равна нулю, а левая — не равна нулю. Итак, данное уравнение эквивалентно уравнению (2'). Из уравнения (2') находим:

$$\cos 2x = \frac{1}{3}, \quad \cos 2x = -\frac{1}{4},$$

и, значит,

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3},$$

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right),$$

где k принимает все целые значения.

4. Предположим, что прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) удовлетворяет условию задачи; пусть a — длина его меньшего катета, b — длина большего катета, а c — длина гипотенузы. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и через G точку пересечения его медиан. Пусть r — величина радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $r = IG$ или

$$r^2 = IG^2.$$

Так как A — меньший из двух острых углов треугольника ABC, то $\angle ICG = \frac{\pi}{4} - A$ (если M — середина гипотенузы AB, то $\triangle CMA$ равнобедренный). Далее, $CI = r\sqrt{2}$, $CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c}{3}$, так как $CM = \frac{c}{2}$, а $CG = \frac{2}{3} CM$. Теперь по теореме косинусов из треугольника ICG имеем:

$$IG^2 = CI^2 + CG^2 - 2\,CI \cdot CG \cos \angle ICG,$$

или

$$r^2 = 2r^2 + \frac{c^2}{9} - 2r\sqrt{2}\,\frac{c}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right), \qquad (1)$$

или

$$9r^2 + c^2 - 6\sqrt{2}\,cr \cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 0,$$

или

$$9 + \left(\frac{c}{r}\right)^2 - 6\sqrt{2}\,\frac{c}{r} \cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 0. \qquad (2)$$

Далее: так как $s = pr$ (где s — площадь треугольника, а p — его полупериметр), то

$$ab = (a + b + c)\,r,$$

$$\frac{c}{r} = \frac{c(a+b+c)}{ab} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1}{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} = \frac{\sin A + \cos A + 1}{\sin A \cos A};$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \sin A + \cos A,$$

и, полагая

$$\sin A + \cos A = x,$$

находим:

$$\sin A \cos A = \frac{x^2 - 1}{2},$$

так что соотношение (2) примет вид:

$$9 + \left(\frac{x+1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^2 - 6\,\frac{x+1}{\frac{x^2-1}{2}}\,x = 0,$$

или

$$9 + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{12x}{x-1} = 0,$$

или

$$3x^2 + 6x - 13 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1.$$

Итак,

$$\cos A + \sin A = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1$$

и, значит,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$A = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (3)$$

следовательно,

$$B = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

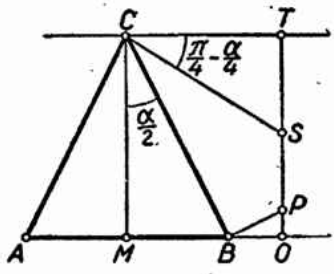


Рис. 54

Обратно: если A — острый угол прямоугольного треугольника, то, производя выкладки в обратном порядке, получим соотношение (2), из которого следует (1), т. е. $r^2 = IG^2$, следовательно, $IG = r$, т. е. точка пересечения медиан треугольника лежит на вписанной в него окружности.

4. Пусть O — точка, равноудаленная от центров трех кругов,

являющихся основаниями данных конусов. Пусть M — центр одной из этих окружностей (рис. 54). Тогда $OM = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Проведем плоскость через прямую OM и высоту одного из конусов. В сечении этого конуса получим равнобедренный треугольник ACB. Проведем через точки C и O прямые, соответственно перпендикулярные CM и OM, и точку пересечения этих прямых обозначим буквой T. Проведем биссектрису угла TCB и обозначим через S точку пересечения этой биссектрисы с прямой OT. Задача имеет решение только тогда, когда $TS \leqslant TP$, где P — точка пересечения прямой, проходящей через B перпендикулярно CB, с прямой TO.

Имеем:

$$OP = OB \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} - r\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$OT = CM = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$TP = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} - r\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$TS = \frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Неравенство

$$TS \leqslant TP$$

принимает вид:

$$\frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) \leqslant r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} - r\right) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$\alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

(в условии задачи дано, что $\alpha < \frac{2\pi}{3}$ и, значит, задача разрешима). Радиус R искомой сферы равен TS, т. е.

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Вариант 2

1. Область определения функции

$$\varphi = -8^{\log_2 x} + 2x^2 + x - 2$$

такова: $x > 0$. Неравенство $\varphi < 0$ эквивалентно неравенству:

$$-2^{3\log_2 x} + 2x^2 + x - 2 < 0,$$

или

$$-2^{\log_2 x^3} + 2x^2 + x - 2 < 0,$$

а это неравенство эквивалентно следующей системе:

$$-x^3 + 2x^2 + x - 2 < 0, \quad x > 0,$$

или

$$-x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) < 0, \quad x > 0,$$

или

$$(x^2 - 1)(2 - x) < 0, \quad x > 0,$$

откуда

$$0 < x < 1, \quad x > 2.$$

Все решения данного неравенства образуют два интервала: $(0,1)$ и $(2, +\infty)$.

2. Данная система неравенств эквивалентна следующей:

$$(\sin x - a) \lg x > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Случай I. $a \geqslant 1$.

Тогда $\sin x - a < 0$ и, значит, должно быть $\lg x < 0$, т. е. $0 < x < 1$.

Случай II. $0 < a < 1$.

В этом случае неравенство $\sin x - a < 0$ выполняется при $0 < x < \arcsin a$; неравенство $\sin x - a > 0$ выполняется при $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$; неравенство $\lg x < 0$ выполняется при $0 < x < 1$, а неравенство $\lg x > 0$ выполняется при $1 < x < \frac{\pi}{2}$ (во всех случаях учитываются данные неравенства $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

Итак, $(\sin x - a)\lg x > 0$ в двух случаях:

I. $0 < x < \arcsin a$,
$0 < x < 1$, т. е. в случае

$0 < x < \arcsin a$, если $\arcsin a \leqslant 1$, т. е. $a \leqslant \sin 1$, и в случае $0 < x < 1$, если $\arcsin a > 1$, т. е. $a > \sin 1$.

II. $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$,

$1 < x < \frac{\pi}{2}$.

Если $\arcsin a \leqslant 1$, т. е. $0 < a \leqslant \sin 1$, то $1 < x < \frac{\pi}{2}$;

если $\arcsin a > 1$, т. е. $a > \sin 1$, то $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$. Итог исследований дан в таблице:

$a \leqslant \sin 1$	$0 < x < \arcsin a$, $1 < x < \frac{\pi}{2}$
$\sin 1 < a < 1$	$0 < x < 1$, $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$
$a \geqslant 1$	$0 < x < 1$

3. Данная система эквивалентна следующей:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} = 3, \qquad |x-y| = \frac{\pi}{3}$$

или, так как

$$\cos(x-y) = \cos|x-y| = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

следующей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\cos x \sin y} &= 3, \\ |x-y| &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Следующая система эквивалентна этой:

$$\left.\begin{aligned} 2\cos x \sin y &= \frac{1}{3}, \\ |x-y| &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

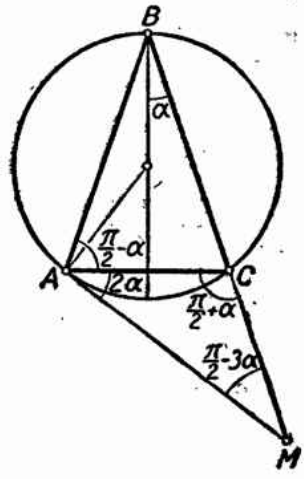


Рис. 55

Система (2) эквивалентна следующей:

$$\sin(y+x)+\sin(y-x)=\frac{1}{3},$$

$$|x-y|=\frac{\pi}{3}.$$

Если $x-y>0$, то $x-y=\frac{\pi}{3}$, $\sin(y-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin(x+y)=$ $=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}>1$. Если $x-y<0$, то $x-y=-\frac{\pi}{3}$; тогда $\sin(x+y)=$ $=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$x+y=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x-y=-\frac{\pi}{3},$$

откуда

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

где k принимает все целые значения.

4. Заметим, что если $\alpha=\frac{\pi}{6}$, то касательная в точке A к окружности (ABC), описанной вокруг треугольника ABC, параллельна BC ($\triangle ABC$ в этом случае равносторонний). Если $\alpha>\frac{\pi}{6}$, то касательная к окружности (ABC) в точке A пересекает продолжение отрезка BC за точку B, а при условии $\alpha<\frac{\pi}{6}$ (что дано в условии задачи) касательная в точке A к окружности (ABC) пересекает продолжение отрезка BC за точку C (рис. 55).

По теореме синусов:

$$AC=2R\sin 2\alpha.$$

Применяя ту же теорему к треугольнику ACM, находим:

$$\frac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)},$$

откуда

$$AM=\frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}\cdot 2R\sin 2\alpha.$$

Далее,

$$AB = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha,$$

и, следовательно, площадь S треугольника ABM равна:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R\cos\alpha \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha} \cdot 2R\sin 2\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{4R^2 \sin\alpha\cos^4\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

5. Высоты данных конусов образуют трехгранный угол, все плоские углы которого равны α. Значит, если продолжить основания конусов до взаимного пересечения, то получится трехгранный угол Ω с вершиной S, все внутренние двугранные углы которого равны $\pi - \alpha$, причем каждая окружность основания вписана в один из плоских углов трехгранного угла Ω (рис. 56). Точки касания A и B одной из таких окружностей ω, лежащей в основании одного из конусов с ребрами трехгранного угла Ω, будут вместе с тем точками касания с окружностью ω окружностей, лежащих в основании двух других конусов.

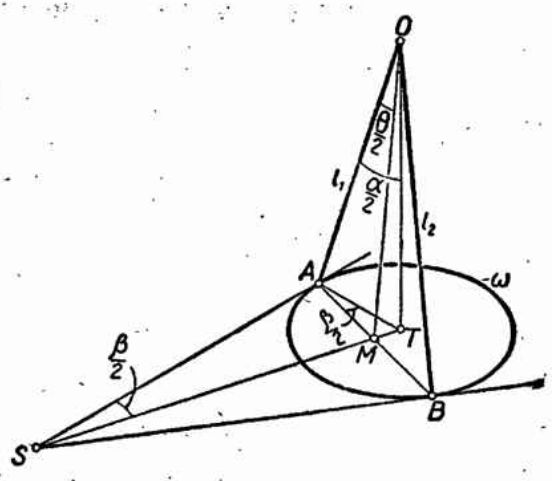


Рис. 56

Пусть O — общая вершина данных конусов, M — середина отрезка AB, θ — искомый угол между образующими l_1 и l_2. Тогда

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{AM}{OA}.$$

Пусть T — проекция точки O в плоскость окружности ω. Примем длину AT равной 1. Положим $\angle ASB = \beta$. Применяя формулу, связывающую внутренний двугранный угол правильной треугольной пирамиды с плоским углом при вершине (см. вторую часть замечания 1 к решению задачи № 4, вариант 1, механико-математический факультет, стр. 181), получим:

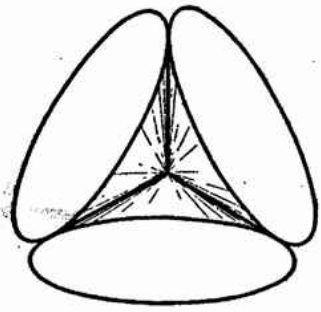


Рис. 57

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее,

$$AM=\cos\frac{\beta}{2},\quad OA=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

и, значит,

$$\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что если $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, то $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=120°$ и, значит, все образующие l_1, l_2, l_3 лежат в одной плоскости (рис. 57).

Если же $\alpha>\frac{2\pi}{3}$, то $\theta>120°$, $3\theta>360°$, что не имеет места ни для одного трехгранного угла. При $0<\theta<\frac{2\pi}{3}$ построение трех равных конусов с общей вершиной и таких, что каждый из них касается двух других, возможно. Для этого надо построить трехгранный угол, все плоские углы которого определяются из соотношения:

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Построение возможно, так как $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$, $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}<1$, $\frac{1}{2}<\cos\frac{\beta}{2}<1$ и, значит, $\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{3}$, $\beta<\frac{2\pi}{3}$. Затем надо вписать в каждый плоский угол такого трехгранного угла равные между собой окружности ω_1, ω_2, ω_3. Оси этих окружностей пересекутся в точке 0. Конусы с вершиной 0, в основании которых лежат окружности ω_1, ω_2, ω_3, будут иметь в осевом сечении угол α, и каждый из них будет касаться двух других.

Вариант 3

1. Система неравенств

$$x^{\lg\sin x}\geqslant 1,\ x>0$$

эквивалентна следующей:

$$\lg\sin x\lg x\geqslant 0,\ x>0.$$

Область D определения функции $\lg \sin x$ состоит из множества интервалов:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \pi.$$

В силу условия $x > 0$ в последних неравенствах k принимает все целые неотрицательные значения. Во всех интервалах I_k имеем: $\lg \sin x \leqslant 0$, и, значит, неравенство $\lg \sin x \lg x \geqslant 0$ выполняется только тогда, когда или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — целое неотрицательное число, или если $\lg \sin x < 0$ и $\lg x \leqslant 0$, т. е. $0 < x \leqslant 1$.

Значит, все решения данного неравенства:

$$0 < x \leqslant 1, \; x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

где n — любое целое неотрицательное число.

2. При $a > 0$ данное неравенство эквивалентно следующему:

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2,$$

или

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a \quad . \tag{1}$$

(заметим, что при $a > 0$ области определения функций $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ и $\sqrt{a^2 - x^2}$ совпадают: $-a \leqslant x \leqslant a$).

Случай I. $a^2 - 2a < 0$, т. е. $0 < a < 2$.

В этом случае неравенство (1), следовательно, и данное неравенство выполняются для всех x из сегмента $[-a, a]$.

Случай II. $a = 2$.

В этом случае неравенство (1) принимает вид:

$$\sqrt{4 - x^2} > 0$$

и выполняется при всех x из *интервала* $(-2, 2)$, $-2 < x < 2$.

Случай III. $a > 2$.

В этом случае $a^2 - 2a > 0$ и неравенство (1) эквивалентно следующей системе:

$$\left.\begin{array}{l} 4(a^2 - x^2) > a^2 (a - 2)^2, \\ |x| < a \end{array}\right.$$

или

$$\left.\begin{array}{l} x^2 < a^3 \frac{4 - a}{4}, \\ |x| < a. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Если $a \geqslant 4$, то это неравенство решений не имеет.

Будем считать, что $2 < a < 4$. Тогда первое из неравенств (2) выполняется при условии

$$|x| < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}.$$

Заметим, что при $2 < a < 4$ выполняется неравенство:

$$\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < a.$$

В самом деле, это неравенство эквивалентно следующему:

$$\sqrt{a(4-a)} < 2,$$

или

$$a(4-a) < 4,$$

или

$$a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 > 0.$$

Значит, в случае $2 < a < 4$ имеем:

$$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}.$$

Результаты исследований даны в таблице:

$0 < a < 2$	$-a \leqslant x \leqslant a$
$a = 2$	$-2 < x < 2$
$2 < a < 4$	$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$
$a \geqslant 4$	Решений нет

3. Преобразуем данное уравнение так:

$$\frac{-\sin x}{\cos x \cos 2x} = \sin x.$$

Отсюда 1) $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi$, где k принимает все целые значения. Заметим, что при $\sin x = 0$ имеем: $\cos x = \pm 1$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1$, так что $\cos x \cos 2x \neq 0$; значения $x = k\pi$ (где k — любое целое) — корни данного уравнения.

Остается решить уравнение

$$-\frac{1}{\cos x \cos 2x} = 1,$$

которое эквивалентно следующему:

$$\cos x \cos 2x = -1.$$

Из этого уравнения *следует*, что или $\cos x = 1$, или $\cos x = -1$. Если $\cos x = 1$, то $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1$ и, значит,

$\cos x \cos 2x = 1$. Если же $\cos x = -1$, то $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1$ и, значит, $\cos x \cos 2x = -1$.

Таким образом, все значения x, для которых $\cos x = -1$, — корни данного уравнения. Но все корни уравнения $\cos x = -1$ содержатся в множестве корней уравнения $\sin x = 0$. Значит, все корни данного уравнения $x = k\pi$, где k принимает все целые значения.

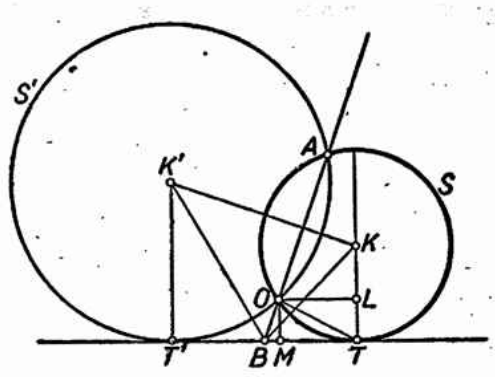


Рис. 58

4. Решим сначала такую задачу: на одной из сторон данного угла B $(0 < B < \pi)$ даны две различные точки O и A на данных расстояниях от вершины B угла: $BO = p > 0$, $BA = q > 0$. Вычислить радиус окружности, проходящей через точки O и A и касающейся прямой, на которой лежит сторона данного угла, не содержащая точек O и A. Прежде всего заметим, что центры K и K' искомых окружностей являются пересечениями медиатрисы отрезка OA с перпендикулярами к стороне угла, не содержащей точек A и O, в точках T и T', лежащих на этой стороне, причем $BT = BT' = \sqrt{pq}$ (докажите!).

Пусть T — точка прикосновения одной из указанных окружностей S к стороне угла. Имеем (рис. 58):

$$BT = \sqrt{pq},$$
$$OT^2 = p^2 + pq - 2p\sqrt{pq}\cos B.$$

С другой стороны, если L — проекция точки O на диаметр окружности S, проходящий через точку T, то

$$OT^2 = TL \cdot 2R = OM \cdot 2R = p \sin B \cdot 2R,$$

где R — радиус окружности S. Таким образом,

$$R = \frac{p + q - 2\sqrt{pq}\cos B}{2\sin B}.$$

Аналогично находим значение для радиуса R' второй окружности S':

$$R' = \frac{p + q + 2\sqrt{pq}\cos B}{2\sin B}.$$

При $B = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$R = R' = \frac{p+q}{2}.$$

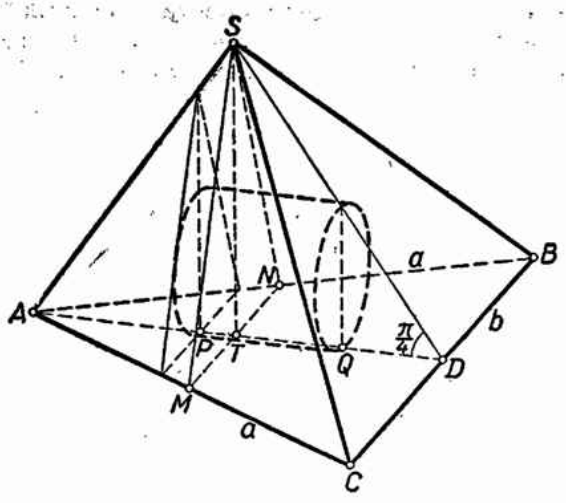


Рис. 59

В данной задаче

$$p = \frac{c}{2},\ q = c\ (c = AB)$$

и полученные формулы принимают вид:

$$R = c\frac{3 - 2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B},$$

$$R' = c\frac{3 + 2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B}.$$

По теореме синусов:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin(B + C)},$$

откуда

$$c = \frac{a\sin C}{\sin(B+C)},$$

так что окончательно:

$$R = \frac{a\sin C}{\sin(B+C)}\cdot\frac{3 - 2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B},\quad R' = \frac{a\sin C}{\sin(B+C)}\cdot\frac{3 + 2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B}.$$

Точка T лежит между точками B и C только тогда, когда

$$BT < BC,$$

или

$$\frac{c}{\sqrt{2}} < a,$$

или

$$\sin C < \sqrt{2}\sin(B + C).$$

5. Пусть PQ — образующая цилиндра, по которой он касается плоскости основания. Полагая $AD = h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$ и обозначая через T проекцию точки S на плоскость основания, имеем (рис. 59):

$$\frac{\frac{h}{2} - PT}{\frac{h}{2}} = \frac{x}{d},\qquad (1)$$

где x — диаметр цилиндра, а d — диаметр окружности, вписанной в треугольник SMN, который получается в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через высоту ST перпендикулярно высоте AD основания.

Так как $ST = TD = \frac{h}{2}$,

$$TN = \frac{b}{4}, \quad \text{то} \quad SN = \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{b^2}{16}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{16}} = \frac{a}{2}.$$

Поэтому полупериметр треугольника SMN равен $p = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + a\right) = \frac{1}{4}(b + 2a)$. Его площадь $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh}{8}$. Теперь из формулы $s = pr$, т. е. $\frac{bh}{8} = \frac{b+2a}{4} r$ находим радиус r окружности, вписанной в треугольник SMN:

$$r = \frac{bh}{2(b + 2a)},$$

откуда ее диаметр

$$d = \frac{bh}{b + 2a}.$$

Теперь из соотношения (1) находим:

$$PT = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x}{d}\right) = \frac{h}{2}\left[1 - \frac{(b + 2a)x}{bh}\right] = \frac{h}{2} - \frac{b + 2a}{2b} x.$$

Далее, $TQ = \frac{h}{2} - QD = \frac{h}{2} - x$ и так как $PT + TQ = x$,

то

$$\frac{h}{2} - \frac{b + 2a}{2b} x + \frac{h}{2} - x = x,$$

откуда

$$\frac{x}{2} = \frac{bh}{2a + 5b} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + 5b)}.$$

Вариант 4

1. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$4^x + 5 \cdot 2^x + 2 > 4,$$

или

$$4^x + 5 \cdot 2^x - 2 > 0,$$

или

$$\left(2^x+\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(2^x-\frac{\sqrt{33}-5}{2}\right)>0,$$

или

$$2^x>\frac{\sqrt{33}-5}{2},$$

откуда

$$x>\log_2\frac{\sqrt{33}-5}{2}.$$

2. Перепишем данное неравенство так:

$$2|x-a|+x^2-2ax<-2,$$

или

$$2|x-a|+x^2-2ax+a^2<a^2-2,$$

или

$$|x-a|^2+2|x-a|<a^2-2.$$

Если $a^2-2\leqslant 0$, неравенство решений не имеет. Предполагая, что $|a|>\sqrt{2}$, перепишем его так:

$$(|x-a|+1)^2>a^2-1.$$

В силу условия $|a|>\sqrt{2}$ имеем: $a^2-1>1$, и, значит, это неравенство эквивалентно следующему:

$$|x-a|+1<\sqrt{a^2-1},$$

или

$$|x-a|<\sqrt{a^2-1}-1\ (>0),$$

откуда

$$a-\sqrt{a^2-1}+1<x<a+\sqrt{a^2-1}-1,\ \text{где}\ |a|>\sqrt{2}.$$

3. Следующая формула верна только тогда, когда ни одно из чисел

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ \cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

не равно 0:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Так как $x + 2x + (-3x) = 0$, то при условии, что ни одно из чисел $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ не равно нулю, имеем:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = 0.$$

Значит, данное уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = 0$$

эквивалентно следующему:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{k\pi}{3},$$

где k принимает все целые значения.

4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник: $AB = AC$. Угол A не может быть ни тупым, ни прямым, так как тогда точка H пересечения высот лежит на продолжении высоты AD за точку A и потому не может лежать на вписанной окружности. Для равнобедренного треугольника с острым углом A при вершине условие задачи выполняется только тогда, когда

$$HD = 2r, \tag{1}$$

где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Полагая $BD = 1$, находим (рис. 60):

$$HD = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad r = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

и соотношение (1) принимает вид:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

или

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = 1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$$

и, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}.$$

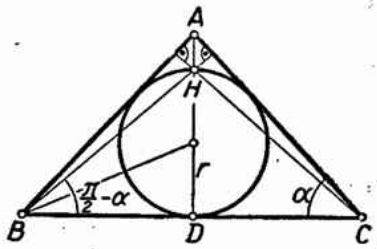


Рис. 60

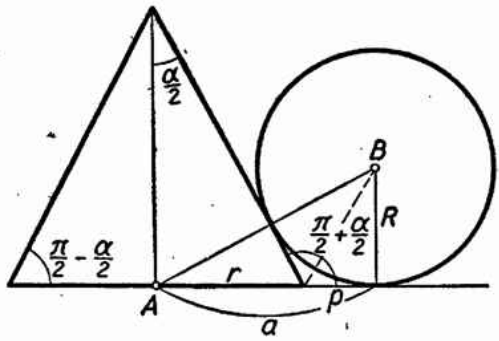


Рис. 61

Отметим, что при этом значении $\cos\alpha$,

$$\cos A = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} > 0,$$

так что A — острый угол («близкий» к 90°).

5. Расстояние a от центра основания конуса до точки, в которой одна из сфер касается конуса (внешним образом) и плоскости его основания, равно (рис. 61):

$$a = r + p = r + R\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Треугольник ABC, площадь которого надо определить, равнобедренный, причем

$$AB = AC = \sqrt{a^2 + R^2}$$

и

$$BC = 2R \quad \text{(рис. 62)}.$$

Его высота

$$AD = \sqrt{AB^2 - R^2} = a,$$

так что его площадь

$$S = aR = R\left[r + R\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)\right].$$

Вариант 5

1. Данная система неравенств эквивалентна следующей:

$$x^{2\sin x - \cos 2x + 1} < 1, \quad x > 0$$

или

$$x^{2\sin x + 2\sin^2 x} < 1, \quad x > 0;$$

эта система неравенств эквивалентна одному неравенству:

$$\sin x(\sin x + 1)\lg x < 0. \tag{1}$$

Далее,

$$\sin x(\sin x + 1) > 0$$

только тогда, когда $\sin x > 0$, т. е.

$$2k\pi < x < 2k\pi + \pi,$$

где k принимает все целые неотрицательные значения. Для выполнения неравенства (1) при этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lg x < 0$, т. е. $0 < x < 1$. Таким образом, все числа интервала (0,1) являются решениями данного неравенства. Далее, $\sin x < 0$ только тогда, когда

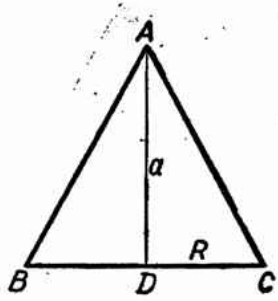


Рис. 62

$$2k\pi - \pi < x < 2k\pi, \qquad (2)$$

а так как при этом для выполнения неравенства (1) должно быть $\lg x > 0$, т. е. $x > 1$, то все числа x всех интервалов (2), где k — любое натуральное число, являются решениями данного неравенства. Итак, все решения данного неравенства образуют совокупность интервалов (0,1) и $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$, где k — любое натуральное число.

2. Перепишем данное неравенство следующим образом:

$$\sqrt{a^2 - (a-x)^2} \geqslant a - x$$

или, полагая $a - x = u$:

$$\sqrt{a^2 - u^2} \geqslant u. \qquad (1)$$

Область D определения функции $\sqrt{a^2 - u^2}$ такова: $-a \leqslant u \leqslant a$. Если $-a \leqslant u < 0$, или $-a \leqslant a - x < 0$, или $a < x \leqslant 2a$, то неравенство $\sqrt{a^2 - u^2} \geqslant u$ выполняется. Будем считать, что $0 \leqslant u \leqslant a$. Тогда неравенство (1) эквивалентно такому:

$$a^2 - u^2 \geqslant u^2,$$

откуда

$$|u| \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}},$$

а так как $u \geqslant 0$, то $u \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Итак,

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}},$$

т. е.

$$0 \leqslant a - x \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant x - a \leqslant 0,$$

и окончательно:

$$a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqslant x\leqslant 2a.$$

3. Перепишем данное уравнение так:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 4x=0$$

или

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 4x}=0.$$

Корни уравнения $\sin 3x=0$ таковы:

$$x=\frac{k\pi}{3}, \tag{1}$$

где k принимает все целые значения. При всех этих значениях k функции $\cos x$, $\cos 2x$ и $\cos 4x$ в нуль не обращаются, поэтому все эти значения x являются и корнями данного уравнения.

Остается решить уравнение:

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}-\frac{1}{\cos x\cos 4x}=0.$$

Следствием этого уравнения является следующее:

$$\cos 2x=\cos 4x.$$

Отсюда либо

$$2x=2n\pi,\ x=n\pi,$$

где n — любое целое число (это множество значений x входит в множество решений уравнения $\sin 3x=0$), либо

$$6x=2s\pi,$$

и мы получаем снова все корни уравнения $\sin 3x=0$.

Итак, все решения уравнения (1): $x=\frac{k\pi}{3}$, где k принимает все целые значения.

4. Покажем, что существуют и притом только две окружности, удовлетворяющие условию задачи.

Пусть (O) — произвольная окружность, касающаяся сторон данного угла. Обозначим через A и B точки пересечения окружности (O) с прямой OM. Произведем гомотетию Γ_1 с центром S (вершина данного угла) и таким коэффициентом, чтобы точка A перешла в точку M. Тогда радиус AO перейдет в радиус $MO_1 \parallel AO$ окружности (O_1), касающейся сторон данного угла (кроме того, для построения точки O_1 следует учесть, что точка O_1 лежит на биссектрисе данного угла).

Произведем гомотетию Γ_2 с центром S и такую, чтобы точка B перешла в точку M; тогда радиус BO перейдет в радиус $MO_2 \parallel BO$ окружности (O_2), касающейся сторон данного угла.

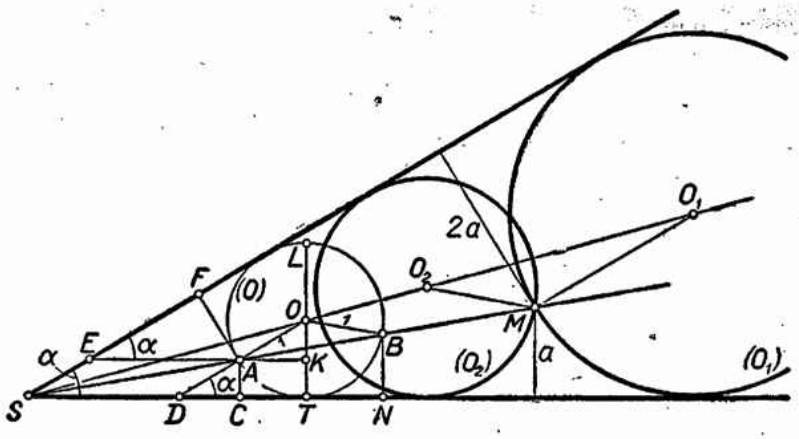


Рис. 63

Так как любая окружность, удовлетворяющая условию задачи, получается гомотетией Γ, при которой или точка A, или точка B переходит в точку M, то существуют *только* две окружности, удовлетворяющие условию задачи.

Для вычисления радиусов R_1 и R_2 окружностей (O_1) и (O_2) примем $OA = OB = 1$. Тогда R_1 и R_2 будет соответственно равны коэффициентам гомотетий Γ_1 и Γ_2.

Пусть C — проекция точки A на ту сторону данного угла, от которой точка M отстоит на расстоянии, равном a. Положим $AC = x$; тогда коэффициент гомотетии равен $\frac{a}{x} = R_1$. Проведем через точку A прямые AD и AE, параллельные сторонам данного угла (рис. 63). Пусть F — проекция точки A на вторую сторону данного угла. Тогда $AF = 2x$. Имеем:

$$SD = EA = \frac{2x}{\sin\alpha},$$

$$DC = x\operatorname{ctg}\alpha,\ ST = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

и, следовательно,

$$CT = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2x}{\sin\alpha} - \frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пусть K — проекция точки A на прямую OT, тогда $AC = KT = x$ и, значит ($CT = AK$),

$$\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2x}{\sin\alpha} - \frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = x(2-x),$$

или

$$(1+\cos\alpha)^2 - 2(1+\cos\alpha)(2+\cos\alpha)\,x +$$

$$+ (2 + \cos\alpha)^2 x^2 = \sin^2\alpha \cdot x(2 - x),$$

или

$$x^2(4 + 4\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - [2(1 + \cos\alpha)(2 + \cos\alpha) + 2(1 - \cos^2\alpha)]x + (1 + \cos\alpha)^2 = 0,$$

или

$$(1 + \cos\alpha)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 6(1 + \cos\alpha)\frac{1}{x} + 5 + 4\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{x} = \frac{3(1+\cos\alpha) \pm \sqrt{9(1 + \cos\alpha)^2 - (5 + 4\cos\alpha)(1 + \cos\alpha)^2}}{(1 + \cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{4 - 4\cos\alpha}}{1 + \cos\alpha} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Если y — расстояние от точки B до указанной на рисунке 63 стороны угла, то для определения y получится то же самое квадратное уравнение. Следовательно, один из найденных корней дает величину $\frac{1}{x}$, а другой — величину $\frac{1}{y}$. Радиусы окружностей:

$$\frac{3 \pm 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\, a.$$

5. Пусть AMN — плоскость, наклоненная к плоскости ABC под углом α и пересекающая грань SBC по прямой $MN \parallel CB$ (точки M и N лежат соответственно на ребрах SC и SB). Пусть P и Q проекции точек S и A соответственно на плоскости ABC и SBC. Обозначим через O точку пересечения прямых SP и AQ. Тогда $SO : OP = AO : OQ = 3$, причем $AO = BO = R$ — величина радиуса сферы, описанной вокруг тетраэдра $SABC$. Так как высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, то

$$R = \frac{3}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

Пусть K — середина отрезка BC, тогда (рис. 64):

$$QK = \sqrt{AK^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

и, значит,

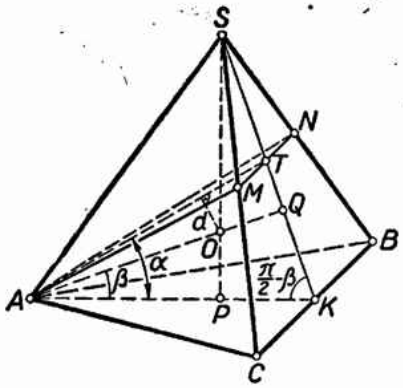


Рис. 64

$$\sin\beta = \frac{QK}{AK} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Расстояние d от точки O до секущей плоскости в случае $\alpha \geqslant \beta$ равно:

$$d = R\sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, a\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha\right) =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{6}}(2\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Если $\alpha < \beta$, то

$$d = \frac{a}{2\sqrt{6}}(\cos\alpha - 2\sqrt{2}\sin\alpha),$$

так что во всех случаях

$$d = \frac{a}{2\sqrt{6}}\,|2\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha|.$$

Радиус окружности, по которой секущая плоскость пересекает сферу ($SABC$), описанную вокруг данного тетраэдра, равен:

$$\rho = \sqrt{R^2 - d^2},$$

и, значит, площадь сечения

$$\pi\rho^2 = \pi(R^2 - d^2) =$$

$$= \pi\left[\frac{3}{8}a^2 - \frac{a^2}{24}(2\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{24}(9 - 8\sin^2\alpha + 4\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{24}(8\cos^2\alpha + 4\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{24}(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)^2.$$

Остается определить площадь треугольника AMN. Имеем:

$$\frac{AT}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{AK}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right)},$$

откуда

$$AT = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha} =$$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Далее,

$$\frac{TK}{\sin\alpha} = \frac{AT}{\cos\beta},$$

$$TK = \frac{a\sqrt{6}\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}\,a\sin\alpha}{2(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Далее,

$$ST = SK - KT = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}\,a\sin\alpha}{2(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{3\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} =$$

$$= a\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Теперь из пропорции

$$\frac{MN}{ST} = \frac{CB}{SK}$$

находим:

$$MN = ST \cdot \frac{CB}{SK} =$$

$$= a\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} \cdot \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= 2a\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Таким образом,

$$\text{пл. } \triangle AMN = \frac{1}{2}\,MN \cdot AT =$$

$$= a\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} =$$

$$= a^2\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)^2}.$$

Искомая площадь σ:

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{24}(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - a^2\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{(2\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha)^2}.$$

Вариант 6

1. Корни уравнения $(\lambda = 2^{x^2})$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

таковы:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right)^2.$$

Данное неравенство выполнено, если

$$2^{x^2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, \tag{1}$$

или

$$2^{x^2} \geqslant \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Неравенство (1) не выполняется ни при одном действительном значении x, так как $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < 1$, а $2^{x^2} \geqslant 1$. Все решения неравенства (2), а следовательно, и данного находятся из условия:

$$x^2 \geqslant 2\log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

откуда или

$$x \leqslant -\sqrt{2\log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \text{ или } x \geqslant \sqrt{2\log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Иначе,

$$|x| \geqslant \sqrt{2\log_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

2. Данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{|\sin x|} 3 \cdot \log_{\sin^2 x} |\sin x| = a,$$

или

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_{|\sin x|} 2 \cdot \frac{1}{2} = a,$$

или

$$\log^2_{|\sin x|} 2 = 2a\log_3 2.$$

Отсюда следует, что если $a \leqslant 0$, то уравнение не имеет решений. Если же $a > 0$, то

$$\log_{|\sin x|} 2 = \pm \sqrt{2a \log_3 2},$$

откуда

$$|\sin x| = 2^{\frac{1}{\pm\sqrt{2a\log_3 2}}}.$$

Так как

$$2^{\frac{1}{\sqrt{2a\log_3 2}}} > 1, \quad 0 < 2^{-\frac{1}{\sqrt{2a\log_3 2}}} < 1,$$

то

$$|\sin x| = 2^{-\frac{1}{\sqrt{2a\log_3 2}}}$$

или

$$\sin^2 x = 2^{-\sqrt{\frac{2\log_2 3}{a}}}$$

и, значит,

$$x = k\pi \pm \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}.$$

3. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4(\sin x + \cos x) + \sin x + \sin 3x + \cos x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x),$$

$$4(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x \cos x + 2\sin 2x \sin x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x),$$

$$4(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x),$$

$$2(2 + \sin 2x)(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$$

и так как $2 + \sin 2x \neq 0$ при всех значениях x, то данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

или

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

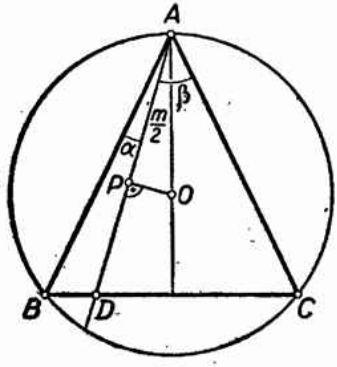


Рис. 65

4. По теореме синусов имеем (рис. 65):

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\angle BDA}, \qquad \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\angle ADC},$$

где $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle DAC$. Но $AB = AC$ и $\sin\angle BDA = \sin\angle ADC$, следовательно,

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin\beta},$$

откуда

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{k}.$$

Так как $\alpha + \beta = A$, то

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{1}{k}$$

или

$$\sin A \operatorname{ctg}\alpha - \cos A = \frac{1}{k},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{1}{k} + \cos A}{\sin A}.$$

Пусть O — центр окружности (ABC), описанной вокруг треугольника ABC, а P — проекция точки O на прямую AD. Тогда

$$AP = AO\cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)$$

(в случае $\alpha > \frac{A}{2}$ будем иметь: $AP = AO\cos\left(\alpha - \frac{A}{2}\right) = AO\cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)$, откуда $(AO = R)$

$$R = \frac{m}{2\cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{m}{2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\alpha + \sin\frac{A}{2}\sin\alpha\right)} = \frac{m}{2\sin\alpha\left(\cos\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\alpha + \sin\frac{A}{2}\right)} =$$

$$= \frac{m}{2\sin\alpha\left(\cos\frac{A}{2}\,\frac{\frac{1}{k} + \cos A}{\sin A} + \sin\frac{A}{2}\right)} =$$

$$= \frac{m\sin A}{2\sin\alpha\left(\frac{1}{k}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos A + \sin\frac{A}{2}\sin A\right)} =$$

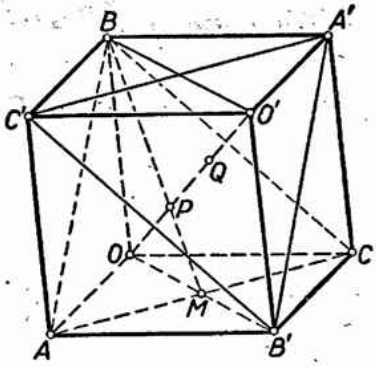


Рис. 66

$$= \frac{m \sin A}{2 \sin \alpha \left(\frac{1}{k} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)} = \frac{km \sin A}{2(k+1) \sin \alpha \cos \frac{A}{2}}$$

и, далее,

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{k} + \cos A \right)^2 + \sin^2 A}} = \frac{k \sin A}{\sqrt{k^2 + 2k \cos A + 1}};$$

окончательно:

$$R = \frac{m \sqrt{k^2 + 2k \cos A + 1}}{2(k+1) \cos \frac{A}{2}}.$$

5. Пусть OA, OB, OC — три ребра *произвольного* параллелепипеда, выходящие из произвольной его вершины O; AA', BB', CC' и OO' — диагонали этого параллелепипеда. Тогда диагональ OO' пересекает плоскости треугольников ABC и $A'B'C'$ в их центрах тяжести и делится этими плоскостями на три равные части. В самом деле, если M — точка пересечения OB' и AC, то BM — медиана треугольника ABC, а так как она лежит в одной плоскости с диагональю OO' ($BO'B'O$ — параллелограмм, M — середина OB'), то BM пересекает OO' в точке P, лежащей между O и O'. Из подобия треугольников OPM и BPO' имеем (рис. 66):

$$\frac{BP}{PM} = \frac{PO'}{PO} = \frac{BO'}{OM} = 2.$$

Аналогично доказывается, что вторая точка Q пересечения OO' с плоскостью треугольника $A'B'C'$ делит диагональ $O'O$ в отношении $OQ : QO' = 2$ и что точка Q является точкой пересечения медиан треугольника $A'B'C'$.

Если рассматриваемый параллелепипед является кубом, то диагональ O' перпендикулярна плоскостям, в которых лежат треугольники ABC и $A'B'C$. В самом деле, $OO' \perp AC$, так как проекция OB' прямой OO' на плоскость $OAB'C$ перпендикулярна AC ($AOCB'$—квадрат). Аналогично доказывается, что $OO' \perp BC$ (и $OO' \perp AB$). Плоскости треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны, так как параллельны их сходственные стороны (это верно и для произвольного параллелепипеда).

Основания данного цилиндра — это окружности, вписанные в

треугольники ABC и $A'B'C'$. Так как эти треугольники равносторонние и сторона каждого из них равна $a\sqrt{2}$, то радиус цилиндра равен $\frac{a}{\sqrt{6}}$. Высота же его равна $\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ($a\sqrt{3}$ — длина диагонали OO'). Значит, объем цилиндра равен:

$$V = \pi \frac{a^2}{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3}{6\sqrt{3}}.$$

§ 33. Химический факультет, 1967 г.

Вариант 1

1. Скорость автомобиля 80 *км/ч*, скорость велосипедиста 20 *км/ч*. 2. $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg} 2$, $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, где k принимает все целые значения. 3. $2(1-\alpha)$. 4. $\pi k + \frac{\pi}{4} < x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{3}$, где k принимает все целые значения.

Вариант 2

1. Скорость первой моторной лодки 6 *км/ч*, скорость второй 21 *км/ч*, $AB = 45$ *км*. 2. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, где k принимает все целые значения. 3. $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$. 4. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $3 \leqslant x < \pi$, $2n\pi < x < 2n\pi + \pi$, где k и n принимают произвольные натуральные значения.

Вариант 3

1. Через 3 *ч*. 2. $x = 0$. 3. $\frac{1-\alpha}{\beta}$. 4. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое, отличное от нуля целое число; $-\frac{3\pi}{2} < x \leqslant -4$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, где n принимает все целые значения, кроме $n = 0$ и $n = -1$.

Вариант 4

1. $\frac{440}{19}$ *км/ч*. 2. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$. 3. $\frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{2}$. 4. $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\pi + \operatorname{arc\,tg} 4 \leqslant x < n\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = s\pi + \operatorname{arctg} 2$, где k, n, s принимают все целые значения.

§ 34. Геологический факультет (отделение геофизики), 1967 г.

Вариант 1

1. $x \geqslant 1$. 2. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, где k принимает все целые значения. 3. 4.

4. Случай I. $a > 0$.

В этом случае данные неравенства соответственно эквивалентны следующим:

$$(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right) \geqslant 0,$$

$$x \geqslant \frac{4}{a}.$$

По условию задачи для любого $x \geqslant \frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$$\varphi = (x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right) < 0.$$

Однако это неверно, так как если x больше всех чисел

$$\frac{4}{a},\ a,\ \frac{2a+3}{a},\ \text{то}\ \varphi > 0.$$

Случай II. $a < 0$.

В этом случае данные неравенства соответственно эквивалентны следующим:

$$(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right) \leqslant 0,$$

$$x \leqslant \frac{4}{a}.$$

По условию задачи для любого $x \leqslant \frac{4}{a}$ должно выполняться неравенство:

$$(x-a)\left(x-\frac{2a+3}{a}\right) > 0.$$

Это будет только тогда, когда

$$\frac{4}{a} < a \ \text{и}\ \frac{4}{a} < \frac{2a+3}{a},$$

или (так как $a < 0$)

$$a^2 < 4,\ 4 > 2a+3,$$

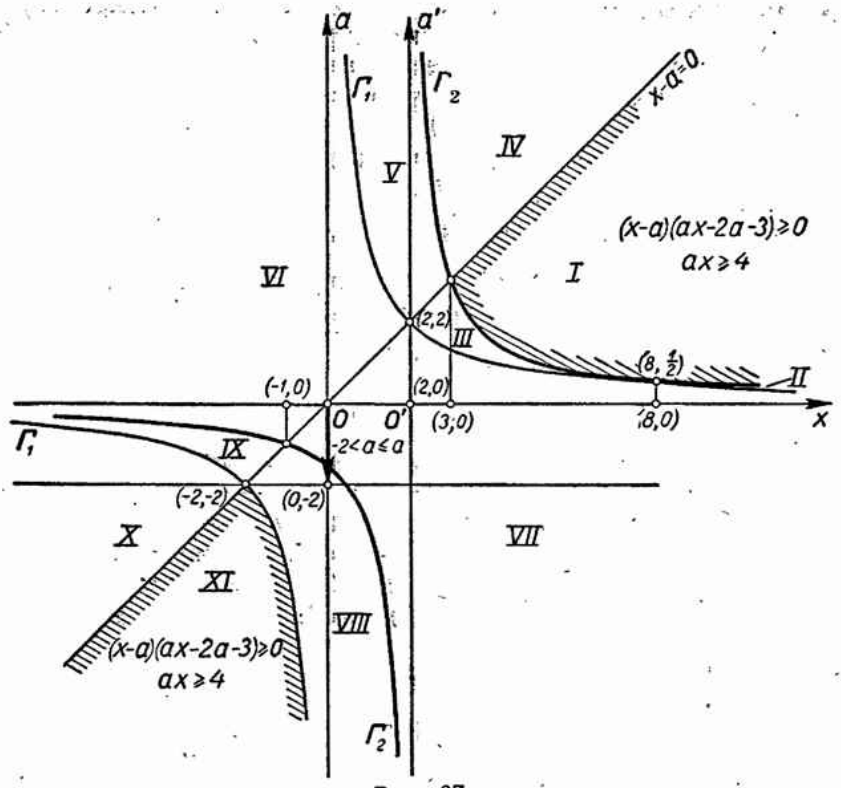


Рис. 67

или $(a < 0)$

$$-a < 2,\ a < \frac{1}{2},$$

и окончательно:

$$-2 < a < 0.$$

Наконец, условию задачи удовлетворяет и значение $a = 0$. Итак,

$$-2 < a \leqslant 0.$$

Данное решение допускает следующую геометрическую интерпретацию. Будем считать a — ординатой (x — абсцисса). Уравнение

$$(x - a)(ax - 2a - 3) = 0$$

распадается на уравнение прямой:

$$x - a = 0$$

и на уравнение гиперболы Γ_1:

$$a(x - 2) - 3 = 0 \text{ (рис. 67)}.$$

Неравенство $x - a > 0$ выполняется для всех точек той полуплоскости от прямой $x - a = 0$, в которой лежит, например, точка с координатами $x = 1$, $a = 0$ (единичная точка оси Ox); неравенство $x - a < 0$ выполняется для всех точек другой полуплоскости. Неравенства $a(x - 2) - 3 > 0$ и $ax > 4$ выполняются для всех внутренних точек гиперболы Γ_1 и гиперболы Γ_2, заданной уравнением $xa = 4$ (рис. 67). Гиперболы Γ_1 и Γ_2 пересекаются в одной только точке $(8, \frac{1}{2})$. Гиперболы Γ_1, Γ_2 и прямая $x - a = 0$ делят плоскость на одиннадцать областей, но так как точки, для координат которых выполняются неравенства

$$ax \geqslant 4,$$
$$a(x - 2) - 3 \geqslant 0,$$
$$x - a \geqslant 0$$

должны лежать внутри гипербол Γ_1 и Γ_2 или на самих этих гиперболах и «ниже» или на самой прямой $x-a=0$, то только для областей I и XI, включая и их границы, выполняются эти неравенства. Из рисунка 67 видно, что только для значений a_0, $-2 < a_0 \leqslant 0$ на прямой $a = a_0$, параллельной или совпадающей с осью Ox, не существует ни одной точки (x, a), координаты которой удовлетворяют данным неравенствам.

Вариант 2

1. $3 < x \leqslant \frac{13 + 3\sqrt{141}}{10}$. 2. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, где k принимает все целые значения. 3. $\frac{69}{100}$. 4. Значение $a = 0$ не входит в область определения функции $ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a$ и потому в дальнейшем не рассматривается.

Случай I. $a > 0$.

В этом случае неравенство $ax \geqslant a^2 - 2$ эквивалентно следующему:

$$x \geqslant \frac{a^2 - 2}{a}$$

и, конечно, существуют значения x, удовлетворяющие этому неравенству, для которых

$$\varphi = ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a = a\left(x - \frac{a+1}{a}\right)\left(x - 2\frac{1-a}{a}\right) > 0.$$

Для этого достаточно взять значение x, большее чисел $\frac{a^2-2}{a}$, $\frac{a+1}{a}$ и $2\frac{1-a}{a}$. Значит, все положительные значения a не удовлетворяют условию задачи.

Случай II. $a<0$.

В этом случае неравенство $ax \geqslant a^2-2$ эквивалентно такому:

$$x \leqslant \frac{a^2-2}{a},$$

и по условию задачи при любом таком x должно выполняться неравенство:

$$a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)\left(x-2\frac{1-a}{a}\right)<0,$$

или ($a<0$):

$$\left(x-\frac{a+1}{a}\right)\left(x-2\frac{1-a}{a}\right)>0.$$

Последнее неравенство будет выполняться при всех $x \leqslant \frac{a^2-2}{a}$ только тогда, когда

$$\frac{a^2-2}{a}<\frac{a+1}{a}, \quad \frac{a^2-2}{a}<2\frac{1-a}{a},$$

или ($a<0$)

$$\begin{aligned} a^2-2&>a+1,\\ a^2-2&>2-2a, \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a^2-a-3&>0,\\ a^2+2a-4&>0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \left(a-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(a+\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)&>0,\\ (a+1+\sqrt{5})(a+1-\sqrt{5})&>0, \end{aligned}\right\}$$

а так как $a<0$, то

$$a+\frac{\sqrt{13}-1}{2}<0, \qquad a+1+\sqrt{5}<0,$$

откуда

$$a<-1-\sqrt{5}.$$

Задача имеет следующую геометрическую интерпретацию. Перепишем данные неравенства в виде:

$$\begin{aligned} a\,[a(x-1)-1]\,[a(x+2)-2] &\geqslant 0,\\ a(a-x) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Уравнение $a=0$ есть уравнение оси Ox (a — ордината), уравнения $a(x-1)=1$ и $a(x+2)=2$ являются уравнениями гипербол Γ_1 и Γ_2; асимптоты первой: $a=0$, $x=1$; асимптоты вто-

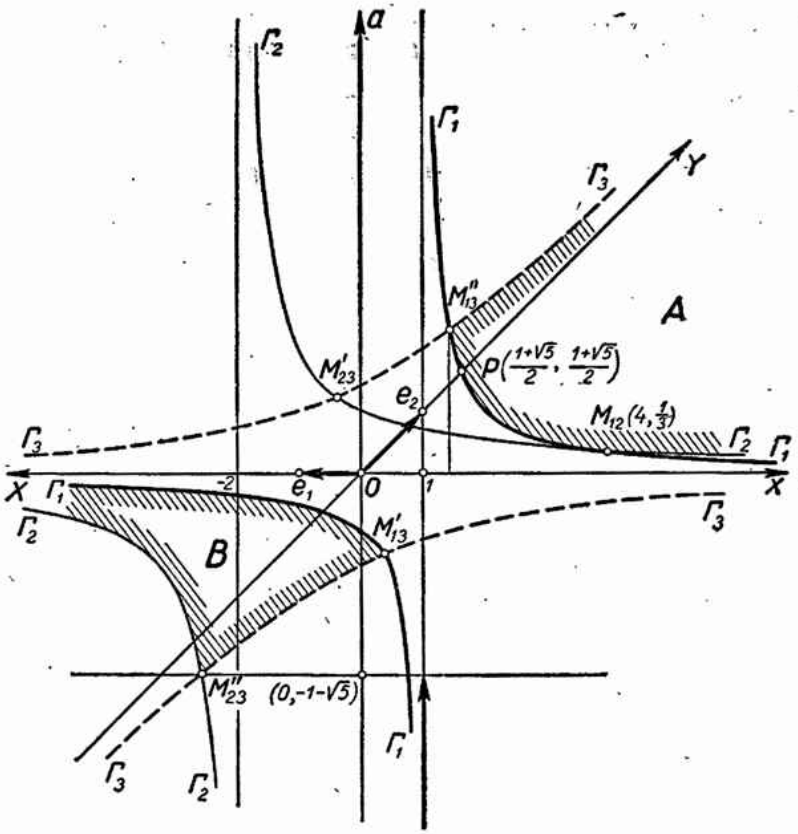


Рис. 68

рой: $a=0$ и $x=-2$ (рис. 68). Уравнение $a(a-x)=2$ есть также уравнение гиперболы (Γ_3). Произведем преобразование системы координат:

$$X=a-x, \quad Y=a.$$

Старые координаты нового масштабного вектора оси OX ($X=1$, $Y=0$) будут: $x=-1$, $a=0$. Старые координаты нового масштабного вектора оси OY ($X=0$, $Y=1$) будут: $a=1$, $x=1$ (рис. 68):

$$e_1=\{-1,\ 0\}, \quad e_2=\{1,\ 1\}.$$

Уравнение гиперболы Γ_3 в системе XOY:

$$XY=2.$$

Гиперболы Γ_1 и Γ_2 пересекаются в одной точке $M_{12}\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

Гиперболы Γ_1 и Γ_3 пересекаются в двух точках:

$$M'_{13}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right), \quad M''_{13}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Гиперболы Γ_2 и Γ_3 пересекаются в двух точках:

$$M'_{23}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \sqrt{5}-1\right), \quad M''_{23}\left(\frac{-\sqrt{5}-3}{2}, -\sqrt{5}-1\right).$$

Для областей A и B, отмеченных на рис. 68, оба данных неравенства выполняются, и если $a_0 \geqslant -1-\sqrt{5}$, то прямая $a=a_0$ пересекает одну из этих областей ($a_0 \neq 0$). Если $a_0 < -1-\sqrt{5}$, то прямая $a=a_0$ пересекает гиперболу Γ_3 в некоторой точке (x_0, a_0); при $x > x_0$ не выполняется второе из данных неравенств, а при $x \leqslant x_0$ не выполняется первое неравенство.

Вариант 3

1. $0 < x < \frac{\sqrt{17}-3}{2}$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k принимает все целые значения. 3. $\frac{4\sqrt{2h^3}}{3\sqrt{3}}$.

4. Случай I. $a > 0$.

В этом случае данные в условии задачи неравенства соответственно эквивалентны следующим:

$$\frac{x+\frac{2}{a}}{x+\frac{a^2-2}{a}} \geqslant 0,$$

$$x > \frac{5-4a}{4a}$$

и, конечно, существуют значения x, при которых все эти неравенства выполняются; для этого надо взять x бóльшим чисел

$$-\frac{2}{a}, \quad -\frac{a^2-2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5-4a}{4a}.$$

Случай II. $a < 0$.

В этом случае данные в условии задачи неравенства соответственно эквивалентны следующим:

$$\frac{x+\frac{2}{a}}{x+\frac{a^2-2}{a}} \leqslant 0,$$

$$x < \frac{5-4a}{4a}.$$

Для того чтобы при любом $x < \frac{5-4a}{4a}$ не выполнялось неравенст-

во

$$\frac{x+\frac{2}{a}}{x+\frac{a^2-2}{a}} \leqslant 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{5-4a}{4a}+\frac{2}{a}<0,$$

$$\frac{5-4a}{4a}+\frac{a^2-2}{a} \leqslant 0$$

или $(a<0)$

$$4a^2-4a-3 \geqslant 0,$$

откуда (опять следует учесть условие $a<0$)

$$a \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Отметим еще, что $a=0$ также удовлетворяет условию задачи. Итак,

$$a=0,\ a \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Данная задача допускает следующую геометрическую интерпретацию. Перепишем данные неравенства в виде:

$$\frac{a(ax+2)}{ax-2+a^2} \geqslant 0,$$

$$a(x+1)>\frac{5}{4}.$$

Построим гиперболы: $ax=-2$ (Γ_1), $a(x+1)=\frac{5}{4}$ (Γ_2), $a(x+a)=2$ (Γ_3) (рис. 69). Для построения гиперболы Γ_3 хорошо перейти к новой системе координат XOY: $X=x+a$, $Y=a$. Старые координаты нового масштабного вектора e_1 оси OX найдутся из системы $X=1$, $Y=0$, т. е. $x+a=1$, $a=0$, т. е. $e_1=\{1,0\}$. Старые координаты нового масштабного вектора e_2 оси OY найдутся из системы $X=0$, $Y=1$, т. е. $x+a=0$, $a=1$, откуда $e_2=\{-1,1\}$ (рис. 69). Гиперболы Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точке $M_{12}\left(-\frac{8}{13}, \frac{13}{4}\right)$. Гиперболы Γ_1 и Γ_3 пересекаются в точках M'_{13} $(1, -2)$ и M''_{13} $(-1, 2)$. Гиперболы Γ_2 и Γ_3 пересекаются в точках $M'_{23}\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right)$ и $M''_{23}\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Для области A данные неравенства выполняются (при этом параметр a

изменяется в интервале $0 < a < +\infty$). При $a = 0$ данные неравенства не выполняются ни при одном значении x.

Внутри Γ_2 и вне Γ_3 (для $a < 0$) будет выполнено первое неравенство. Если $a_0 < -\frac{1}{2}$, то прямая $a = a_0$ пересекает гиперболу Γ_2 в точке (x_0, a_0). При $x < x_0$ не выполняется первое неравенство, а при $x \geqslant x_0$ — второе. Если $a = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{7}{2}$ и $ax - 2 + a^2 = 0$, так что первое неравенство не выполняется ни при одном значении x ($ax - 2 + a^2$ — знаменатель!).

Вариант 4

1. $x > -\frac{1}{2}$. 2. $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, где k принимает все целые значения. 3. $\arccos \frac{3}{4}$. 4. Неравенство $x - 8 \geqslant ax$ эквивалентно следующему:

$$(1 - a)\, x \geqslant 8.$$

Случай I. $a < 1$.

В этом случае неравенство $(1 - a)\, x \geqslant 8$ эквивалентно такому:

$$x \geqslant \frac{8}{1 - a},$$

и если взять x больше чисел

$$\frac{a}{1 - a},\quad 2(1 - a) \text{ и } \frac{8}{1 - a},$$

то будут выполнены неравенства:

$$\frac{(1 - a)\, x - a}{x - 2(1 - a)} > 0,$$
$$x - 8 > ax.$$

Итак, все значения $a < 1$ не удовлетворяют условию задачи.

Случай II. $a > 1$.

В этом случае неравенство $(1 - a)\, x \geqslant 8$ эквивалентно такому

$$x \leqslant \frac{8}{1 - a},$$

а первое неравенство — такому:

$$\frac{x - \frac{a}{1 - a}}{x - 2(1 - a)} \leqslant 0.$$

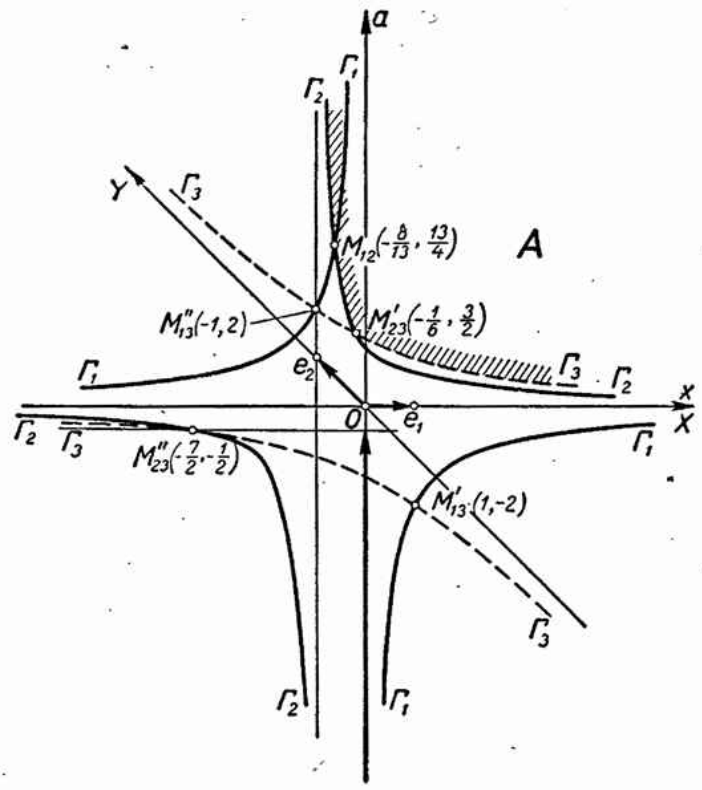


Рис. 69

Для того чтобы оно не выполнялось при всех $x \leqslant \frac{8}{1-a}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{8}{1-a} < \frac{a}{1-a},$$

$$\frac{8}{1-a} \leqslant 2(1-a),$$

или $(a > 1)$

$$\left.\begin{aligned} 8 &> a, \\ 8 &\geqslant 2(1-a)^2, \end{aligned}\right\}$$

или

$$a < 8, \quad a - 1 \leqslant 2,$$

или $a \leqslant 3$. Итак, $1 < a \leqslant 3$.

Случай III. $a = 1$.

При этом второе неравенство принимает вид: $-8 \geqslant 0$, т. е. не выполняется.

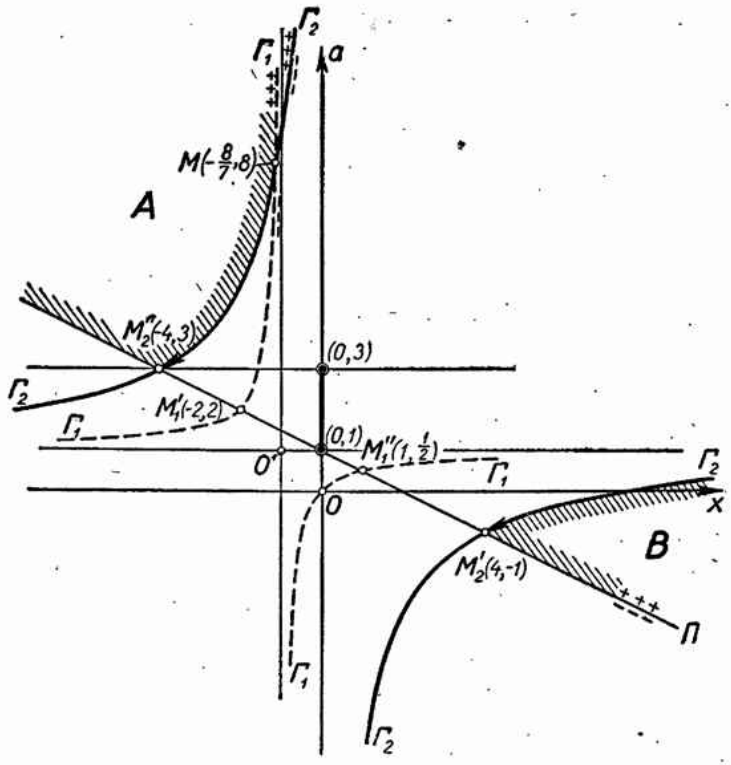


Рис. 70

Итак,

$$1 \leqslant a \leqslant 3.$$

Геометрическая интерпретация. Построим гиперболы $(1-a)\ x-a=0$, или $(a-1)(x+1)=-1$ (Γ_1) и $x-8=ax$, или $x(a-1)=-8$ (Γ_2), а также прямую $x-2(1-a)=0$, или $x+2a-2=0$ (Π) (x — абсцисса, a — ордината). Линии Π и Γ_1 пересекаются в точках $M_1'(-2,2)$ и $M_1''(1,\frac{1}{2})$. Линии Π и Γ_2 пересекаются в точках $M_2'(4,-1)$ и $M_2''(-4,3)$. Линии Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точке $M(-\frac{8}{7},8)$. На рисунке 70 указаны области A и B. Для координат любой точки любой из областей выполнены оба неравенства; исключаются только граничные точки этих областей, принадлежащих прямой Π (рис. 70). Отметим, что ордината a для точек областей A и B изменяется в интервалах $a<1$ и $a>3$.

Если $1 \leqslant a_0 \leqslant 3$, то прямая $a=a_0$ пересекает гиперболу Γ_2 в точке $M_0(x_0, a_0)$. При всех $x>x_0$ не выполняется второе неравенство,

а при всех $x \leqslant x_0$ не выполняется первое неравенство. При $a = 3$ точки M_0 и M_2^* совпадают и первое неравенство поэтому не выполняется.

§ 35. Географический факультет (отделение почвоведения) и геологический факультет (общее отделение), 1967 г.

Ответы

Вариант 1

1. На расстоянии 10 *м*. 2. $x \geqslant 1$. 3. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, где k принимает все целые значения. 4. 4.

Вариант 2

1. Первая труба подает жидкость в 2 раза быстрее второй. 2. $3 < x \leqslant \frac{13 + 3\sqrt{141}}{10}$. 3. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, где k принимает все целые значения. 4. $\frac{69}{100}$.

Вариант 3

1. 7 *км/ч*. 2. $0 < x < \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$. 3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k принимает все целые значения. 4. $\frac{4\sqrt{2}h^2}{3\sqrt{3}}$.

Вариант 4

1. $v = 2$ *л/ч*. 2. $x > -\frac{1}{2}$. 3. $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, где k принимает все целые значения. 4. $\arccos\frac{3}{4}$.

§ 36. Биолого-почвенный факультет, 1967 г.

Ответы

Вариант 1

1. $x = 1$, $y = 0$. 2. $1 - \sqrt{6} < x \leqslant 2 - \sqrt{10}$, $1 + \sqrt{6} < x \leqslant 2 + \sqrt{10}$. 3. $x = -1 + \log_3 \frac{4n-1}{2}$, $x = \log_3 \frac{n}{2}$, $x = \log_3 \frac{4n-3}{8}$; во всех трех формулах n принимает все натуральные значения. 4. $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4} a^2$.

Вариант 2

1. $x = 3\left(n - \frac{1}{8}\right)$, $y = -n + \frac{1}{8}$; $x = 3\left(2n - \frac{3}{4}\right)$, $y = -2n +$

$+\frac{3}{4}$; в обеих сериях решений n принимает все натуральные значения; во второй серии $n \neq 3$. 2. $1-2\sqrt{3}<x<1-\sqrt{11}$, $1+\sqrt{11}<x<1+2\sqrt{3}$, $x \leqslant 1-\sqrt{15}$, $x \geqslant 1+\sqrt{15}$. 3. $x=\log_2\left(n-\frac{3}{4}\right)$, $x=\log_2 n$, где n принимает все натуральные значения. 4. $\frac{3\sqrt{3}}{32}$.

Вариант 3

1. $x=2$, $y=1$. 2. $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x \leqslant \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$, $\frac{\sqrt{11}-1}{2} \leqslant x<\frac{\sqrt{13}-1}{2}$. 3. $x=\log_4 k$, $x=\log_4\left(k-\frac{1}{4}\right)$, $x=\log_4\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{8}\right)$; во всех трех формулах k принимает все целые неотрицательные значения. 4. $\frac{3}{4}d^2$.

§ 37. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1967 г.

Вариант 1

1. Во-первых, заметим, что так как N — простое число, то его можно представить в виде $3n+1$ или $3n+2$, где n — натуральное число. В первом случае $N^2=9n^2+6n+1$, во втором: $N^2=9n^2+12n+4=9n^2+12n+3+1$ и, значит, N^2 при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. $N^2=3k+1$, где k — некоторое натуральное число. Так как неполное частное при делении N^2 на 3 есть k, а k по условию делится без остатка на 3, то $k=3s$, где s — некоторое натуральное число. Итак, $N^2=9s+1$. По условию s делится на 3 с остатком, т. е. $s=3\lambda+p$, где λ — некоторое натуральное число, а $p=1$ или $p=2$. Таким образом, $N^2=27\lambda+9p+1$. Используя заключительное условие задачи, получаем: $\lambda=48+q$, где $q=1$ или $q=2$. Итак,

$$N^2=27\cdot 48+27q+9p+1=1297+27q+9p. \qquad (1)$$

Здесь для p и q возможны следующие комбинации значений:

$p=1$, $q=1$; $p=2$, $q=1$;
$p=1$, $q=2$; $p=2$, $q=2$.

Если $p=q=1$, то число $1297+27+9$ оканчивается на 3 и, значит, не может быть квадратом даже натурального числа.

Если $p=1$, $q=2$, то число $1297+54+9$ оканчивается на 0 и, значит, не может быть квадратом простого числа.

Если $p = 2$, $q = 1$, то число $1297 + 27 + 18$ оканчивается на 2 и, значит, не может быть квадратом даже натурального числа. А вот если $p = q = 2$, то $1297 + 54 + 18 = 37^2$. Итак, $N = 37$.

Окончание решения можно провести несколько иначе: из равенства (1) следует, что

$$N^2 - 36^2 = 27q + 9p + 1,$$

или

$$(N - 36)\ (N + 36) = 27q + 9p + 1. \qquad (2)$$

Таким образом, простое число N должно быть больше 36; оно может быть равно только 37, так как если N — натуральное число, большее 37, то левая часть не меньше 148, правая же часть имеет максимальное значение при $p = q = 2$, меньшее, чем 148. Полагая $N = 37$, из равенства (2) находим:

$$73 = 27q + 9p + 1,$$
$$3q + p = 8,$$

и так как p и q могут принимать только значения 1 и 2, то это равенство возможно только тогда, когда $p = q = 2$. Итак, $N = 37$ (необходимо проверить выполнимость условия задачи).

2. Данное неравенство эквивалентно двум системам:

1°. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 1$, $x^2 - 3x + 1 \geqslant 1$;

2°. $0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} < 1$, $0 < x^2 - 3x + 1 \leqslant 1$.

1°. $\sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{x-1}$; это неравенство эквивалентно следующему: $x + 1 > 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1$, или $2\sqrt{x-1} < 1$, или $0 < 4x - 4 < 1$, откуда $1 < x < \frac{5}{4}$. Из неравенства $x^2 - 3x + 1 \geqslant 1$ находим: или $x \leqslant 0$, или $x \geqslant 3$. Полученная система не имеет решений.

2°. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$ при всех $x \geqslant 1$; $\sqrt{x+1} < 1 + \sqrt{x-1}$, $x > \frac{5}{4}$.

Далее, $x^2 - 3x + 1 > 0$, если или $x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, или $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x^2 - 3x + 1 \leqslant 1$ только тогда, когда $0 \leqslant x \leqslant 3$. Окончательно: $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leqslant 3$;

это все решения данного неравенства.

3. Пусть A, $A + \alpha$, $A + 2\alpha$ — углы треугольника ($\alpha \geqslant 0$), а a, $a + d$, $a + 2d$ — длины противолежащих им сторон. Так как $A + A + \alpha + A + 2\alpha = \pi$, то $A + \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Теперь по теореме косинусов имеем:

$$(a + d)^2 = a^2 + (a + 2d)^2 - 2a(a + 2d)\cos\frac{\pi}{3},$$

откуда $d = 0$, и значит, треугольник равносторонний ($a = d = 0$).

4. Перепишем данное уравнение в виде:

$$2\cos^2 y - 1 + 3 - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 0$$

или

$$\cos^2 y - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y + 1 = 0,$$

$$\left(\cos y - \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0;$$

так как

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

то последнее уравнение можно переписать и так:

$$\left[\cos y - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

а это уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\cos y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Отсюда

$$x - \frac{\pi}{4} = k\pi$$

и, значит,

$$\cos y = \cos k\pi.$$

Итак,

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$y = (2n \pm k)\pi,$$

где k и n принимают все целые значения.

Вариант 2

1. Так как по условию N при делении на 3 дает *неполное* частное, то $N = 3n + p$, где n — некоторое натуральное число, а $p = 1$ или $p = 2$.

По условию задачи

$$\frac{N^2+9}{n}=130,$$

или

$$N^2+9=130\ n,$$

или

$$9n^2+6np+p^2+9-130n=0.$$

При $p=1$ получаем уравнение:

$$9n^2-124n+10=0,$$

не имеющее решений в натуральных числах.

При $p=2$ получаем уравнение:

$$9n^2-118n+13=0,$$

которое имеет только одно решение в натуральных числах:

$$n=13.$$

Таким образом,

$$N=3\cdot 13+2=41.$$

2. Если $x>0$, то $x+\frac{1}{x}>0$, а если $x<0$, то $x+\frac{1}{x}<0$. Далее, при $x>0$ имеем: $x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2>1$; значит, данное неравенство эквивалентно системе:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4\geqslant x+\frac{1}{x},\ x>0.$$

Имеем:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\geqslant 0,\ x>0;$$

$$\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\geqslant 0,\ x>0;$$

$$x+\frac{1}{x}-3\geqslant 0,\ x>0;$$

$$x^2-3x+1\geqslant 0,\ x>0;$$

$$\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\geqslant 0,\ x>0.$$

Окончательно:

$$0<x\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad x\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

3. Из условия задачи следует, что углы треугольника ABC рав-

ны $A = \frac{4\pi}{7}$, $B = \frac{2\pi}{7}$, $C = \frac{\pi}{7}$ и, значит, точки A, B и C можно рассматривать как соответствующие вершины правильного семиугольника, вписанного в окружность (рис. 71).

Рассмотрим вершину D этого правильного семиугольника, ближайшую к B (но отличную от A). Тогда $AD = AC$, $CD = CB$, и, применяя к выпуклому четырехугольнику $ABDC$ теорему Птолемея (произведение диагоналей выпуклого вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных его сторон), получим:

$$AC \cdot BC = AB \cdot BC + AB \cdot AC,$$

откуда (делим на $AB \cdot BC \cdot CA$):

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}.$$

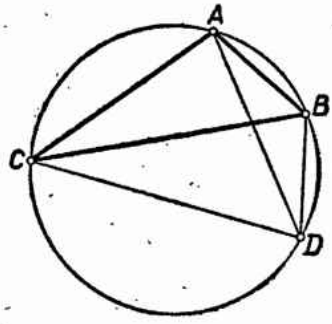


Рис. 71

Другой вариант решения.

Применяя к данному треугольнику теорему синусов, приходим к выводу, что данное равенство эквивалентно такому:

$$\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}},$$

или

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7},$$

или

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7},$$

что, очевидно, верно, так как $-\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}$, а $\cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{6\pi}{7}$. Так как последнее равенство эквивалентно данному, то верно и данное равенство.

4. Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$(\operatorname{tg} x + \sin y + \cos y)^2 + 2 - (\sin y + \cos y)^2 = 0$$

или

$$(\operatorname{tg} x + \sin y + \cos y)^2 + 1 - \sin 2y = 0.$$

Это соотношение выполнено только тогда, когда выполнены два равенства:

$$\sin 2y = 1, \quad \operatorname{tg} x + \sin y + \cos y = 0.$$

Отсюда

$$y = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

и так как

$$\sin y + \cos y = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = (-1)^k \sqrt{2},$$

то

$$\operatorname{tg} x = (-1)^{k+1} \sqrt{2},$$

и, значит,

$$x = n\pi + \operatorname{arc\,tg}\left((-1)^{k+1} \sqrt{2}\right),$$

$$y = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k и n принимают все целые значения.

Вариант 3

1. По условию задачи N при делении на 4 дает в частном k и в остатке s, которое может быть равно 1,2 или 3, причем

$$\frac{N^2 + 2}{k} = 201.$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$(4k + s)^2 + 2 - 201\,k = 0,$$

где $s = 1$, или $s = 2$, или $s = 3$. При $s = 1$ и $s = 2$ это уравнение относительно k не имеет решений в целых положительных числах, а при $s=3$ оно имеет одно такое решение: $k = 11$. Значит, $N = 4k + s = 44 + 3 = 47$.

2. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$1°. \quad \frac{3x}{x^2+1} > 1, \quad x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \geqslant 1;$$

$$2°. \quad 0 < \frac{3x}{x^2+1} < 1, \quad 0 < x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \leqslant 1.$$

$$1°. \quad x^2 - 3x + 1 < 0, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

$x^2 - \frac{5}{2}x \geqslant 0$, и так как $x > 0$ $\left(\text{следует из } \frac{3x}{x^2+1} > 1\right)$, то $x \geqslant \frac{5}{2}$.

Окончательно:

$$\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

2°. $\frac{3x}{x^2+1} < 1$; отсюда или $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, или $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0$; отсюда или $x < \frac{1}{2}$, или $x > 2$; $x^2 - \frac{5}{2}x \leqslant 0$; отсюда $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$. Окончательно: $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3. Задача эта решается совершенно аналогично задаче № 3 варианта 1, и результат тот же: треугольник равносторонний.

4. Перепишем данную систему так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} &= 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y &= \sin^2 z, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} &= 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y &= \sin^2 z, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\sin^2 2x} &= 1 + \sin^2 y, \\ \sin^2 y &= \sin^2 z. \end{aligned}\right\}$$

Так как $\frac{2}{\sin^2 2x} \geqslant 2$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $\sin^2 2x = 1$, и так как $1 + \sin^2 y \leqslant 2$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $\sin^2 y = 1$, то первое уравнение выполняется только тогда, когда

$$\begin{aligned} \sin^2 2x &= 1, \\ \sin^2 y &= 1, \end{aligned}$$

но тогда

$$\sin^2 z = 1.$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 0, \\ \cos y &= 0, \\ \cos z &= 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \qquad y = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad z = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

где k, n, m принимают все целые значения.

§ 38. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1967 г.

Вариант 1

1. 25 раз и 15 раз. **2.** $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, $t \geqslant 4$. **3.** $r^2 \arcsin \frac{a}{2r} - \frac{a}{4}\sqrt{4r^2 - a^2}$. **4.** $x = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{2}{3}$, где k принимает все целые значения.

Вариант 2

1. 4 *ч* 30 *мин* и 4 *ч*. **2.** $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant 2$.

3. $\frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$. **4.** $x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$, где k принимает все целые значения.

Вариант 3

1. 20 и 50. **2.** $0 < t \leqslant \frac{1}{27}$, $t \geqslant \frac{1}{3}$. **3.** $\frac{a(a+b)\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$.

4. $x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{3}$, где k принимает все целые значения.

Вариант 4

1. 4 *ч* и 4 *ч* 30 *мин*. **2.** $\frac{1}{27} \leqslant t \leqslant 3$. **3.** $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha$. **4.** $x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{4}$, где k принимает все целые значения.

§ 39. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1967 г.

Решения и ответы.

Вариант 1

1. Скорость подводы 6 *км/ч*. Скорость велосипедиста 12 *км/ч*. Расстояние от деревни до станции равно 35 *км*.

2. $\frac{k\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, где k при-

нимает все целые значения. При решении задачи учесть, что должно быть выполнено неравенство: $\sin 4x > 0$.

3. $x = \sqrt{2}, \quad y = 2.$

4а). Пусть x и y — половины длин отрезков AC и BC. Тогда согласно условию задачи $x + y = r, \quad \pi x^2 + \pi y^2 = \frac{2}{3}\pi r^2$, где r — радиус данного круга. Перепишем эту систему так:

$$x + y = r,$$
$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3} r^2,$$

или так

$$x + y = r,$$
$$(x + y)^2 - 2xy = \frac{2}{3} r^2.$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3} r^2,$$
$$2xy = \frac{1}{3} r^2,$$

или следующей:

$$x^2 + 2xy + y^2 = r^2,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{3} r^2,$$

или:

$$x + y = r,$$
$$x - y = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

отсюда

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{r}{\sqrt{3}}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right).$$

Для построения точки C строим точку D на данной окружности такую, что $AD = r$; тогда $DB = r\sqrt{3}$. Пусть $DS = \frac{1}{3} DB = \frac{r}{\sqrt{3}}$. На прямой AD от точки D откладываем отрезки $DK = DK' = DS = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Тогда x есть половина отрезка AK, а y — половина отрезка AK' (или наоборот).

4б). К одному экзаменующемуся можно прикрепить трех экзаменаторов I, II, III следующими семью способами:

I, II, III, I II, II III, III I, I II III.

Теми же семью способами можно прикрепить трех экзаменаторов ко второму экзаменующемуся. Значит, если экзаменующихся только 2, то число всех различных способов, которыми они могут быть проэкзаменованы тремя экзаменаторами, равно $7^2 = 49$. Если экзаменующихся n, то число всех различных способов прикрепления к ним трех экзаменаторов равно 7^n.

Вариант 2

1. Пароход проходил каждый день по 117 *км*. Скорость парохода в хорошую погоду 24 *км/час*, в плохую 22,5 *км/час*.

2. $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, где k принимает все целые значения.

3. $x = 2$.

4а). Если c — длина стороны AB треугольника ABC, а x — длина стороны BD прямоугольника $ABDE$, то по условию задачи $cx + x^2 = \frac{hc}{2}$.

Построим сторону квадрата, равновеликого площади данного треугольника. Для этого на прямой отложим отрезки $PQ = h$ и $QR = \frac{c}{2}$ (точка Q лежит между точками P и R). Затем строим окружность с диаметром PR. Пусть S — точка построенной окружности, проекция которой на PR совпадает с Q. Тогда $SQ = \sqrt{\frac{hc}{2}}$. Теперь построим произвольную окружность с диаметром c и на касательной к ней в произвольной точке T отложим отрезок $TM = SQ$. Соединим точку M построенной окружности с ее центром, и пусть эта прямая пересечет окружность в точках K и L (K — точка, лежащая между M и L). Тогда $MK \cdot ML = MT^2$, или, полагая $MK = x$, находим:

$$x(x + c) = \frac{hc}{2}.$$

Задача всегда имеет решение. Это решение единственно, так как уравнение

$$x^2 + cx - \frac{hc}{2} = 0$$

имеет ($c > 0$, $h > 0$) всегда только один положительный корень.

4б). Пусть $abcxyz$ (a, b, c, x, y, z цифры, причем $a \neq 0$) — любое шестизначное число, удовлетворяющее условию задачи. По условию:

$$a + b + c = 6, \quad (1)$$
$$x + y + z = 6, \quad (2)$$

причем a принимает только значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, а b, c, x, y, z могут быть любыми из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Если $a = 6$, то $b + c = 0$ и уравнение (1) имеет одно решение $a = 6$, $b = c = 0$. Если $a = 5$, то $b + c = 1$ и это уравнение имеет два решения; в соответствии с этим и уравнение (1) имеет два решения: $a = 5$, $b = 0$, $c = 1$ и $a = 5$, $b = 1$, $c = 0$ и т. д., и если, наконец, $a = 1$, то уравнение $b + c = 5$, а значит, и уравнение (1) имеет 6 решений. Всего решений, таких, для которых $a \neq 0$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

В отличие от уравнения (1) уравнение (2) имеет

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \text{ решений,}$$

так как x, y и z принимают любые целые значения от 0 до 6.

Всего, таким образом, будет $28 \cdot 21 = 588$ различных шестизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Вариант 3

1. Расстояние от поселка до города равно 20 *км*. Скорость велосипедиста 20 *км/ч*, скорость грузовика 40 *км/ч*, скорость «Волги» 80 *км/ч*.

2. Так как при всех действительных значениях x выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1,$$

причем знак равенства имеет место только при $x = 0$, то все решения неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > 1$$

находятся из условия:

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{1+x^2},$$

откуда

$$|x| < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

Таким образом, все решения неравенства

$$\sin^2 x \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x$$

таковы:

$$0 \neq |x| < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$$

или

$$-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}<x<0,\ 0<x<\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

3. $x=8,\ y=2$ и $x=-12,\ y=-\sqrt[3]{12}$.

4а). Пусть r — радиус круга, внутри которого лежат непересекающиеся круги радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Пусть x — радиус искомого круга. По условию

$$\pi x^2=\pi r^2-\pi r_1^2-\pi r_2^2-\ldots-\pi r_n^2$$

или

$$x^2=r^2-r_1^2-r_2^2-\ldots-r_n^2 .$$

Строим полуокружность с диаметром $AB=r$. На ней строим точку C такую, что $BC=r_1$. Тогда $AC=\sqrt{r^2-r_1^2}$. На полуокружности с диаметром AC строим точку D такую, что $CD=r_2$. Тогда

$$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{r^2-r_1^2-r_2^2}$$ и т. д.

4б). Введем еще одно лицо A_{s+1}, не являющееся шахматистом, так что общее число участников турнира вместе с этим лицом будет $s+1$. Первый приз можно вручить участнику A_1 турнира, или участнику A_2 и т. д., или участнику A_s; условимся, что вручение приза участнику A_{s+1} означает, что первый приз не присуждается никому. Таким образом, возможно $s+1$ способ распределения первого приза. Возьмем один из таких способов распределения первого приза и будем повторять те же рассуждения со вторым призом; получим опять $s+1$ распределений и так для каждого из рассмотренных выше $s+1$ распределений первого приза. Итак, имеется всего $(s+1)^2$ различных (с точки зрения условия задачи) вручений I и II приза, при которых остальные призы не вручаются никому. Продолжая аналогичные рассуждения и дальше, получим ответ: $(s+1)^6$.

Вариант 4

1. Ширины лент равны соответственно 7 *см* (средняя), 8 *см* (широкая), 6 *см* (узкая). В первый раз рабочий отрезал кусок длиной 150 *см*, а от узкой — кусок длиной 200 *см*.

2. $\frac{3}{4}<x\leqslant 1$.

3. Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\left|\cos^2 x-\frac{1}{4}\right|+\left|\cos^2 x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Если $0\leqslant\cos^2 x<\frac{1}{4}$, то оно принимает вид:

$$-\cos^2 x+\frac{1}{4}-\cos^2 x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos^2 x = \frac{1}{4},$$

значит, решений таких, что $0 \leqslant \cos^2 x < \frac{1}{4}$, данное уравнение не имеет.

Если

$$\frac{1}{4} \leqslant \cos^2 x \leqslant \frac{3}{4},$$

то уравнение (1) принимает вид:

$$\cos^2 x - \frac{1}{4} - \cos^2 x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

т. е. удовлетворяется тождественно.

Если, наконец, $\frac{3}{4} < \cos^2 x \leqslant 1$, то уравнение (1) принимает вид:

$$\cos^2 x - \frac{1}{4} + \cos^2 x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

или

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

и, значит, не имеет решений таких, что $\frac{3}{4} < \cos^2 x \leqslant 1$.

Итак, все корни данного уравнения:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

4а). Если $BE = BF = x$, то согласно условию задачи имеем (полагаем $AB = 1$, $BC = 3$):

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} = 3$$

или

$$x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{10} - 2.$$

Заметим, что $\sqrt{10}$ — длина диагонали данного прямоугольника. Таким образом, для построения отрезка BE на диагонали AC откладываем отрезок $AP = 2AB$; тогда $PC = x$.

4б). Так как максимальное значение для цифры шестизначного числа $abcxyz$ по условию задачи равно 2 и $a + b + c = x + y + z$, то найдем сначала число решений уравнения

$$a + b + c = 6,$$

считая, что a, b и c могут принимать только значения 0, 1 и 2. Если $a = 2$, то это уравнение принимает вид: $b + c = 4$ и имеет только *одно* решение: $b = c = 2$. Если $a = 1$, то $b + c = 5$ и решений нет.

Далее, число решений уравнения $a + b + c = 5$ найдем так: при $a = 0$, $b + c = 5$ — нет решений; при $a = 1$, $b + c = 4$ — одно решение; при $a = 2$, $b + c = 3$ — два решения: $b = 1$, $c = 2$ и $b = 2$, $c = 1$. Итого *три* решения.

Число решений уравнения $a + b + c = 4$:
при $a = 0$, $b + c = 4$ — одно решение: $b = c = 2$; при $a = 1$, $b + c = 3$ — два решения; при $a = 2$, $b + c = 2$ — три решения: $b = 2$, $c = 0$; $b = 1$, $c = 1$; $b = 0$, $c = 2$.

Всего *шесть* решений.

Число решений уравнения $a + b + c = 3$:
при $a = 0$, $b + c = 3$ — два решения; при $a = 1$, $b + c = 2$ — три решения; при $a = 2$, $b + c = 1$ — два решения; итого *семь* решений.

Число решений уравнения $a + b + c = 2$:
при $a = 0$, $b + c = 2$ — три решения; при $a = 1$, $b + c = 1$ — два решения; при $a = 2$, $b + c = 0$ — одно решение; всего *шесть* решений.

Число решений уравнения $a + b + c = 1$:
при $a = 0$, $b + c = 1$ — два решения; при $a = 1$, $b + c = 0$ — одно решение; всего *три* решения.

Наконец, число решений уравнения $a + b + c = 0$ равно 1 ($a = b = c = 0$).

То же можно повторить и относительно числа решений уравнения $x + y + z = n$, где $n \leqslant 6$. Значит, искомое число билетов равно $1^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 = 141$.

Вариант 5

1. Иванов в первую и во вторую неделю вырабатывал по 28 деталей в час. Петров в первую неделю вырабатывал 28 деталей в час, а во вторую и третью — по 32 детали в час. Новиков вырабатывал (в третью неделю) 22 детали в час. В первую неделю план был выполнен на 114,8%, во вторую — на 100,6%, в третью — на 109,6%.

2. $4k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 4k\pi$, $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi < x < 4k\pi + 2\pi$,

где k принимает все целые значения.

Указание: переписать данное неравенство в виде:

$$4 \log_{2 \sin \frac{x}{2}} 2 + \log_2 \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2} \leqslant 3$$

или

$$4 \log_u 2 + \log_2 u \leqslant 4, \text{ где } u = 2 \sin \frac{x}{2}.$$

Ограничение на u таково: $0 < u \neq 1$.

3. $x = 4$.

Указание: область определения функции

$$\varphi = 2 \log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} (13 - x) - \log_2 (x - 10)^2 - 2 \log_4 (8 - x)$$

такова:

$$0 < x < 8.$$

Переписать уравнение $\varphi = 0$ в виде:

$$2 \log_2 x + \log_2 (13 - x) - 2 \log (10 - x) - \log (8 - x) = 0$$

и т. д.

4а). Пусть a — сторона квадрата, лежащего в основании данной пирамиды. Тогда ее объем равен $\frac{a^3}{3}$.

Если x — сторона равнобедренного прямоугольного треугольника, лежащего в основании призмы, о которой говорится в условии задачи, то объем этой призмы равен $\frac{1}{2} x^2 h$. По условию

$$\frac{1}{2} x^2 h = \frac{a^3}{3},$$

откуда

$$x^2 = \frac{2a^3}{3h}$$

и, значит,

$$x = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{2}{3} ah}.$$

Отрезок $\sqrt{\frac{2}{3} ah}$ строится так: на прямой откладываем отрезки $AB = \frac{2}{3} a$ и $BC = h$.

На отрезке AC как на диаметре строим полуокружность. Пусть перпендикуляр к AC в точке B пересекает эту полуокружность в точке P; тогда

$$BP = \sqrt{\frac{2}{3} ah}.$$

Итак,

$$x = \frac{a}{h} BP,$$

где отрезок BP уже построен, а a и h даны. Пусть AOB произвольный угол (не нулевой и не развернутый). Отложим на лучах OA и OB соответственно отрезки $OM = a$ и $ON = h$. На луче OB отложим отрезок $OS = BP$. Проведем через точку S прямую, параллельную MN; пусть эта прямая пересечет сторону OA в точке T; тогда $OT = x$.

4б). Так как число юношей равно числу девушек и равно n, а число мест $2n$, то для того, чтобы никакие две девушки не сидели рядом, необходимо и достаточно, чтобы и никакие два юноши не сидели рядом. Таким образом, в ряду должны юноши и девушки чередоваться. Если все девушки занимают, скажем, все нечетные места, то юноши — все четные. Число способов расположения девушек на нечетных местах равно $n!$; таково же число расположений юношей на четных местах. Число всех различных комбинаций, при которых девушки будут занимать нечетные места, а юноши — четные, будет равно $(n!)^2$. Таково же число всех различных расположений, в каждом из которых юноши занимают нечетные места, а девушки — четные. Общее число всех расположений $2 \cdot (n!)^2$.

§ 40. Факультет психологии, 1967 г.

Ответы и решения.

Вариант 1

1. Две прямые образуют два угла, сумма которых равна π; в соответствии с этим и с замечанием к условию задачи имеются следующие два решения: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. **2.** Все значения b, при которых данное уравнение имеет решение, таковы: $b < \frac{1}{2}$; при этом исключаются значения, равные $\frac{1}{3}$, 0 и -1; все эти решения:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{b}{b-1}.$$

3. Недостаточно. **4.** 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152; эти числа также образуют арифметическую прогрессию. **5.** Дадим несколько вариантов решения этой задачи. По условию

$$x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} xy = 1,$$

откуда

$$y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Первый способ.

Так как $x > 0$ и $y > 0$, то $x > 1$. Далее ясно, что в интервале $1 < x < +\infty$ функция y возрастает.

Докажем, что график этой функции $y = f(x) = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, если ее рассматривать даже в интервале $(0, +\infty)$, имеет выпуклость вверх. Для этого достаточно доказать, что

$$A = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) < 0,$$

где

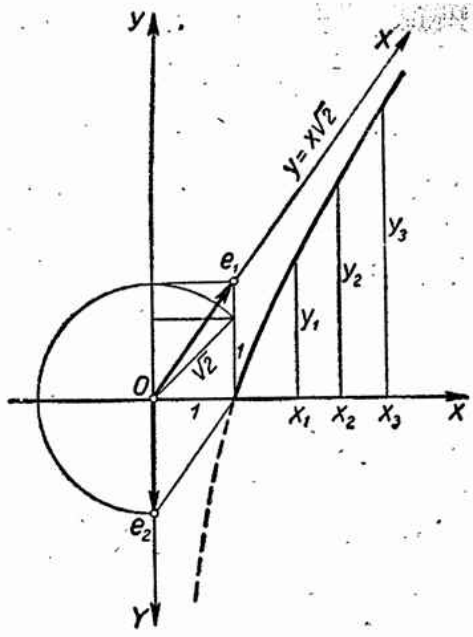


Рис. 72

$$0 < x_1 < x_2 < x_3,$$

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3).$$

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A = (x_1 - x_3)\left(x_2 - \frac{1}{x_2} - x_3 + \frac{1}{x_3}\right) - (x_2 - x_3)\left(x_1 - \frac{1}{x_1} - x_3 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 x_3} < 0.$$

Полезно заметить, что разность ординат линии $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ и прямой $y = x\sqrt{2}$ равна $-\frac{\sqrt{2}}{x}$. Это значит, что ордината прямой ($x > 1$) больше ординаты линии и, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число N, что при всех $x > N$ имеем: $\left|-\frac{\sqrt{2}}{x}\right| < \varepsilon$ (для нахождения N надо решить неравенство $\frac{\sqrt{2}}{x} < \varepsilon$; получим: $x > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} = N$). Геометрически это означает, что прямая $y = x\sqrt{2}$ является асимптотой линии $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Линия $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ имеет еще одну асимптоту — ось ординат (однако для пост-

роения графика функции $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ это несущественно ($x > 1$) (рис. 72).

Второй способ. Перепишем уравнение

$$y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

в виде:

$$x\left(x - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

и введем новую систему координат XOY, полагая

$$X = x,$$

$$Y = x - \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Начало координат новой системы совпадает с началом координат старой системы. Старые координаты x, y нового масштабного вектора e_1 оси OX найдутся из системы:

$$1 = x,$$

$$0 = x - \frac{y}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$e_1 = \{1, \sqrt{2}\}.$$

Старые координаты нового масштабного вектора e_2 оси OY найдутся из системы ($X = 0$, $Y = 1$):

$$0 = x,$$

$$1 = x - \frac{y}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$e_2 = \{0, -\sqrt{2}\} \text{ (рис. 72).}$$

Уравнение $x\left(x - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 1$ в системе XOY принимает вид:

$$XY = 1.$$

Это гипербола, асимптоты которой $X = 0$ и $Y = 0$, или, в старой системе, $x = 0$ (ось ординат) и $y = x\sqrt{2}$.

Графиком функции $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ является дуга этой гиперболы, ограниченная точкой A (1, 0) (в старых координатах) и рассматриваемая для всех $x > 1$.

Вариант 2

1. $\frac{a}{b}\left|\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right|$, где a и b — данные расстояния, а α и β — данные углы.

2. Все значения b, при которых данное уравнение имеет решение:

$$-1 \leqslant b < \frac{1}{2} - \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2} - \sqrt{2} < b < \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} < b < \frac{1}{2} + \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{2} < b \leqslant 2;$$

при этом

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{b^2 - b - 1}.$$

3. Не может. 4. 27 135.

5. Согласно условию задачи имеем:

$$2\pi y \cdot \frac{1}{8} - \pi y^2 = 2\pi x \cdot \frac{1}{2}$$

или

$$x = \frac{y}{4} - y^2,$$

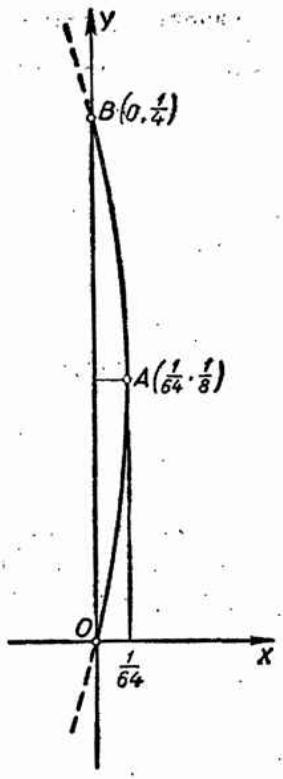


Рис. 73

причем $x > 0$, $y > 0$.

Вершина этой параболы: $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{8}\right)$. Точки пересечения параболы с осью Ox (0,0) и $(0, \frac{1}{4})$, с прямой $y = x$

(0,0) и $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ (рис. 73).

Графиком уравнения $x = \frac{y}{4} - y^2$ при условии $x > 0$, $y > 0$, $y > x$ является открытая дуга $\overset{\frown}{OAB}$ этой параболы (граничные точки O и B к графику не причисляются).

Вариант 3

1. $\sqrt{\frac{9m^2}{\sin^2\alpha} - l^2} + \sqrt{\frac{9m^2}{\sin^2\beta} - l^2}$, если проекция P точки M

на ребро двугранного угла лежит на отрезке AB, и $\left|\sqrt{\frac{9m^2}{\sin^2\alpha}-l^2}-\right.$ $\left.-\sqrt{\frac{9m^2}{\sin^2\beta}-l^2}\right|$, если точка P лежит вне отрезка AB.

2. $|a|<1$, $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\sqrt{1-a^2}$.

3. Хватит (ровно две секунды!) только тогда, когда пирамида правильная. **4.** 23, 51, 79, 107, 135, 163, 191, 219, 247, 275, 303, 331, 359, 387 (14 чисел). **5.** $y=\frac{x}{x-1}$; или $(x-1)(y-1)=1$ — гипербола с центром в точке (1,1); асимптоты $x=1$ и $y=1$.

Вариант 4

1. $2h^2\,\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **2.** Данное уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$x=k\pi\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{1+a^2}},$$

где k принимает все целые значения, а a принимает все действительные значения, такие, что $|a|>1$, кроме $a=-\sqrt{3}$ и $a=\sqrt{3}$.

3. Хватит, если длина x одной стороны каменной стены изменяется на сегменте $2(10-\sqrt{10})\leqslant x\leqslant 2(10+\sqrt{10})$; при этом длина одной стороны деревянной стены изменяется на сегменте $5(10-\sqrt{10})\leqslant y\leqslant 5(10+\sqrt{10})$ (x и y из этих сегментов следует выбирать так, чтобы $xy=900$). **4.** 127, 81, 243.

5. По условию задачи

$$2\pi xy-2\pi x^2=2\pi,$$

откуда

$$y=x+\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Для построения графика этой функции (для $x>0$) заметим, что она в интервале $(0,+\infty)$ принимает наименьшее значение: $y_{\min}=2$ при $x=1$. В самом деле,

$$y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\leqslant 2,$$

причем знак равенства достигается только при $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, т. е. при $x=1$.

На полуинтервале $(0,1]$ функция (1) убывает, так как если

$$0 < x_1 < x_2 \leqslant 1,$$

то

$$y_2 - y_1 = x_2 + \frac{1}{x_2} - x_1 - \frac{1}{x_1} = (x_2 - x_1)\frac{x_1x_2 - 1}{x_1x_2} < 0.$$

Если же $1 \leqslant x_1 < x_2$, то $y_2 - y_1 > 0$, т. е. на полуинтервале $[1, +\infty)$ эта функция возрастает.

Далее (см. задачу 5, вариант 1, стр. 271), если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то

$$A = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) = (x_1 - x_3)\left(x_2 + \frac{1}{x_2} - x_3 - \frac{1}{x_3}\right) - (x_2 - x_3)\left(x_1 + \frac{1}{x_1} - x_3 - \frac{1}{x_3}\right) = (x_1 - x_3)\left(x_2 - x_3 - \frac{x_2 - x_3}{x_2x_3}\right) - (x_2 - x_3)\left(x_1 - x_3 - \frac{x_1 - x_3}{x_1x_3}\right) = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\left(1 - \frac{1}{x_2x_3} - 1 + \frac{1}{x_1x_3}\right) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}{x_1x_2x_3} > 0;$$

значит, график функции

$$y = x + \frac{1}{x}$$

на интервале $(0, +\infty)$ имеет выпуклость вниз (рис. 74).

Другой способ. Перепишем уравнение

$$y = x + \frac{1}{x}$$

в виде:

$$x(y - x) = 1 \qquad (1)$$

и произведем преобразование системы координат:

$$x = X,$$
$$y - x = Y.$$

При $X = 1$, $Y = 0$ имеем: $x = 1$, $y = 1$ — новый масштабный вектор новой оси OX

$$e_1 = \{1, 1\}.$$

При $X = 0$, $Y = 1$ имеем: $x = 0$, $y = 1$ —

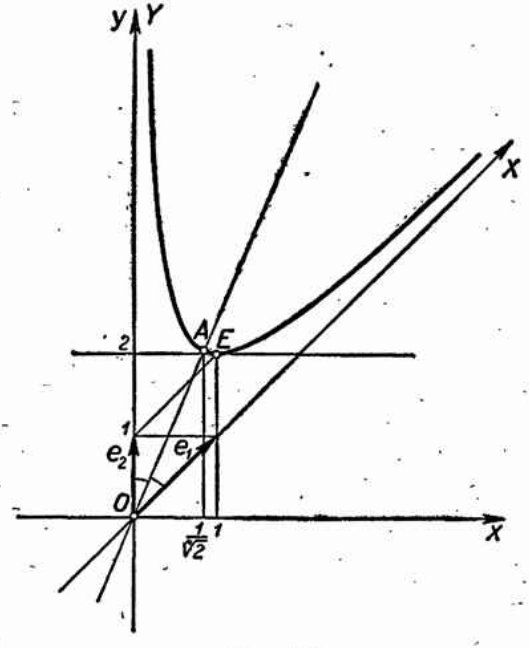


Рис. 74

новый масштабный вектор новой оси OY:

$$e_2 = \{0,\ 1\}.$$

Уравнение (1) в новой системе:

$$XY = 1$$

— это гипербола, асимптоты которой $X=0$ и $Y = 0$, т. е. в старой системе $x = 0$ (ось Oy) и $x - y = 0$ биссектриса углов первой и третьей четвертей (это ясно и из уравнения $y = x + \frac{1}{x}$, из которого следует $y - x = \frac{1}{x}$ и т. д.).

Отметим, что точка E, в которой функция $y = x + \frac{1}{x}$ принимает наименьшее значение в новой системе координат, имеет координаты:

$$X = 1, \qquad Y = 1,$$

т. е. является масштабной точкой новой системы координат.

Найдем еще координаты вершины A рассматриваемой ветви гиперболы.

Уравнения биссектрис углов между асимптотами $x = 0$, $y - x = 0$ таковы:

$$\frac{y - x}{\sqrt{2}} = \pm x,$$

или

$$y - x = \pm x\sqrt{2}.$$

Решая уравнение

$$y - x = x\sqrt{2}$$

совместно с уравнением гиперболы

$$x(y - x) = 1,$$

получим:

$$x^2\sqrt{2} = 1,$$

$$x_A = \frac{1}{\sqrt[4]{2}},\quad y_A = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{2}.$$

ГЛАВА V

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ, 1965 ГОД

(с ответами, указаниями, решениями)

§ 41. Механико-математический факультет, 1965 г.

(Задачи для самостоятельного решения)

Вариант 1

1. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 *ч* быстрее товарного поезда. Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого из поездов была увеличена на 10 *км/ч*, то в этом случае пассажирский поезд проходил бы расстояние AB на 2 *ч* 24 *мин* быстрее товарного поезда. Найти расстояние между городами A и B.

Ответ: 480 *км*.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 3 : 5.

3. Решить неравенство:

$$\log_x [\log_2 (4^x - 6)] \leqslant 1.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \log_2 7 < x \leqslant \log_2 3$.

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению:

$$\cos x + \cos y - \cos (x + y) = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$, $y = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$;

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$, $y = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$,

где k и n — любые целые числа.

Вариант 2

1. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает один за другим 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 *ч* 40 *мин*. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B, каждый автобус мгновенно поворачивает и двигается обратно к городу A.

Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t минут обгоняет 20-й автобус. Найти t и время T, за которое легковая машина преодолевает расстояние AB, если, встретив первый автобус, легковая машина после этого встречает второй автобус через $t - 9$ *мин*.

Примечание. Автобусы занумерованы в том порядке, в котором они выезжают из города.

Ответ: $t = 12$ *мин*, $T = 1$ *ч* 36 *мин*.

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA = AB$ $(MB = 2AB)$. Через точки M, B' и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: 13 : 23.

3. Решить неравенство:

$$\log_2 (\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 1$.

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

где k и n — любые целые числа.

Вариант 3

1. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 *ч* утра из города A в город B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 *ч*. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город к 9 *ч* вечера того же дня?

Ответ: нет.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB = \frac{1}{2}BC$ ($MC = \frac{2}{3}BC$). Через точку M и середины ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 1 : 1.

3. Решить неравенство:

$$\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{6}-1 < x < 2$, $2 < x \leqslant 5$.

4. Найти все решения уравнения:

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

Ответ: $x = n\pi$, $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, где n — любое целое число.

Вариант 4

1. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу: один из пункта A в пункт B, а другой из пункта B в пункт A — и встречаются в 12 *ч* дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 *мин* раньше. Если же, напротив, увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 *мин* раньше. Определить время встречи автобусов в случае, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

Ответ: 10 *ч* 29 *мин*.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка M так, что $DM = 2\,CD$ ($CM = 3\,CD$). Через точки M, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 31: 29.

3. Решить неравенство:

$$4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

4. Найти все пары чисел a, b, для которых всякая пара чисел x, y ($x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $m =$

$= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), удовлетворяющая уравнению $x + y = a$, удовлетворяет также уравнению:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b.$$

Ответ: $b = 1$, $a = n\pi + \frac{\pi}{4}$,

где n — любое целое число.

Вариант 5

1. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб.

Сколько стоит покупка и что дороже: портфель или авторучка?

Ответ: 28 руб.; портфель дороже авторучки.

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра $A'B'$ взята точка M так, что $B'M = \frac{1}{2} A'B'$ ($A'M = \frac{3}{2} A'B'$). Через точку M и середины ребер $A'C'$ и $B'B$ проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: 49 : 95.

3. Решить неравенство:

$$\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

4. Сколько решений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет уравнение

$$\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Ответ: уравнение не имеет корней на всей числовой оси.

Вариант 6

1. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выходят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь

на расстоянии 20 *км* от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли бы обе против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B. Найти расстояние между городами A и B.

Ответ: 100 *км*.

2. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. На продолжении ребер AB, AA', AD отложены соответственно отрезки BP, $A'Q$ и DR длиной $\frac{3}{2}AB$ ($AP = AQ = AR = \frac{5}{2}AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

Ответ: 1 : 47.

3. Решить неравенство:

$$\log_x(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x \geqslant 2$.

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y = \frac{\pi}{4}(4n-2k+1)$,

где k и n — любые целые числа.

Вариант 7

1. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных.

Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав 2 монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

Ответ: 2 монеты по 15 коп. и 6 монет по 20 коп.

2. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.

3. Решить уравнение:

$$|3^x - 2 \cdot 3^{-x}|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} = 1.$$

Ответ: $x = 2$, $x = \log_3 2$.

4. Найти все такие числа p, при которых уравнение

$$1 + p \sin x = p^2 - \sin^2 x$$

имеет решение.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant |p| \leqslant 2$.

Вариант 8

1. Велосипед проехал из пункта A в пункт B по пути, состоящему из подъема и спуска, общей длиной 60 *км* и потратил на подъем и спуск одинаковое время. Дальше он проехал за 4 *ч* от пункта B до пункта C по ровной дороге, длина которой на 19 *км* больше, чем длина подъема по пути из A в B. С какой скоростью он ехал на подъеме, если известно что его скорость на спуске больше скорости на подъеме на 6 *км/ч*, а скорость по ровной дороге равна среднему арифметическому из скоростей на подъеме и спуске.

Ответ: 7 *км/ч*.

2. Решить уравнение:

$$\sin y + \cos 3y = 1 - 2 \sin^2 y + \sin 2y.$$

Ответ: $y = 2n\pi$, $y = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $y = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$,

где n — произвольное целое число.

3. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является прямоугольник $ABCE$, а высота, опущенная из вершины O на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Плоские углы AOB и BOC равны соответственно φ и ψ, а высота пирамиды равна H. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\frac{4}{3} H^3 \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\varphi+\psi}{2} \cos \frac{\varphi-\psi}{2}}$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \leqslant 4$, $-1 < x < 2$, $x \geqslant 5$.

Вариант 9

1. Имеется два куска ткани разных сортов. Первый кусок стоит 90 руб., а второй — 105 руб. Если бы каждый из кусков был меньше на 10 *м*, то первый кусок стоил бы на 10 руб. дороже второго. Если бы во втором куске ткани было на 5 *м* меньше, чем в обоих кусках вместе, то он стоил бы 210 руб. Определить, сколько метров ткани в каждом куске.

Ответ: 20 *м* и 15 *м*.

2. Решить уравнение:

$$\sin^2 t - \sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ответ: $t = n\pi + \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3})$, где n — произвольное целое число.

3. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является ромб, а высота, опущенная из вершины на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Двугранные углы, прилегающие к ребрам OA и OC, равны α, двугранные углы, прилегающие к ребрам OB и OE, равны β, а высота равна l. Определить объем пирамиды.

Ответ: $-\frac{2}{3} l^3 \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$.

4. Решить неравенство:

$$(\log_{|x+6|} 2)\ \log_2 (x^2 - x - 2) \geqslant 1.$$

Ответ: $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

Вариант 10

1. Машинистка перепечатывала рукопись в течение четырех часов, после чего к ней присоединилась вторая машинистка, и, проработав вместе 13 с половиной часов, они закончили перепечатку рукописи. Определить, сколько времени нужно каждой из машинисток в отдельности на перепечатку рукописи, если известно, что первой на перепечатку половины рукописи надо на два часа больше, чем второй на перепечатку трети рукописи.

Ответ: 28 *ч* и 36 *ч*.

2. Решить уравнение:

$$-2 + 4\cos^2 z = \cos z + \sqrt{3}\sin z.$$

Ответ: $z = \frac{2}{3} n\pi + \frac{\pi}{9}$, $z = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$,

где n — произвольное целое число.

3. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC.

Ответ: $\cos \angle AOC = \operatorname{ctg}^2\gamma$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1,\ x > 2.$

Вариант 11

1. Два поезда отправляются одновременно, один из пункта A в пункт B, а другой из пункта B в пункт A. Скорость первого на 40 *км/ч* больше скорости второго. Они встречаются в пункте C, отстоящем на 60 *км* от середины пути AB. Если бы первый поезд вышел на 1 *ч* 15 *мин* позже второго, то они встретились бы в середине пути AB. Определить скорости обоих поездов.

Ответ: 80 *км/ч* и 120 *км/ч*.

2. Решить уравнение:

$$\sin 3t \cos t = \frac{3}{2}\operatorname{tg} t.$$

Ответ: $x = n\pi,\ x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$,

где n — произвольное целое число.

3. Высота треугольной пирамиды $OABC$, опущенная на основание ABC, падает в точку P, лежащую внутри треугольника ABC. Найти объем этой пирамиды, если известно, что пирамиды $OABP$, $OECP$ и $OCAP$ равновелики и что величины отрезков AP, BP, CP и OP равны соответственно a, b, c, d.

Ответ: $v = d\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geqslant x-1.$$

Ответ: $-\sqrt{13} < x \leqslant 1,\ 2 \leqslant x < \sqrt{13}$.

Вариант 12

1. Одна чугунная болванка весит 40 *кг*, а вторая — 50 *кг*. Погонный метр первой болванки на 1,5 *кг* тяжелее погонного метра второй. Если бы вторая болванка была бы на 6 *м* длиннее первой, то ее вес равнялся бы тем же 40 *кг*. Какова длина каждой из болванок?

Ответ: 10 *м* и 20 *м*.

2. Решить уравнение:

$$\frac{1+\sin 2\varphi}{1-\sin 2\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi.$$

Ответ: $\varphi = n\pi - \frac{\pi}{4}$, $\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 2n\pi$,

где n — произвольное целое число.

3. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб, а высота, опущенная из ее вершины на основание, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Боковая поверхность данной пирамиды равна c. Через одну из сторон основания пирамиды проведена плоскость, отсекающая от противоположной боковой грани треугольник, площадь которого равна a. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена от данной пирамиды проведенной плоскостью.

Ответ: $\left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$.

4. Решить неравенство:

$$(x^2 - x - 1)^{x^2-1} < 1.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < 2$.

§ 42. Физический факультет, 1965 г.

(Задачи для самостоятельного решения)

Вариант 1

1. Для каждого действительного числа a решить неравенство:

$$ax > \frac{1}{x}.$$

Ответ: если $a \leqslant 0$, то все решения $x < 0$. Если $a > 0$, то все решения $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < 0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} < x < +\infty$.

2. Найти все значения x и y (в том числе и комплексные), такие, что числа x, $x + 2y$, $2x + y$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(y + 1)^2$, $xy + 5$, $(x + 1)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

Ответ: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1 + 2i\sqrt{2}$, $y_2 = \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3}$; $x_3 = -1 - 2i\sqrt{2}$, $y_3 = \frac{-1-2i\sqrt{2}}{3}$.

3. Решить уравнение:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}$.

4. В равнобедренном треугольнике даны боковая сторона b и угол α при основании. Вычислить расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной окружности.

Ответ: $\dfrac{b\left|\cos\dfrac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

5. Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину. Эта прямая параллельна одной из сторон квадрата, лежащего в основании пирамиды. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Ответ: $v=\dfrac{\pi a^3}{12}\left(1+2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 2

1. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$x\,|x+1|+a=0.$$

Ответ: если $a<0$, то $x=\dfrac{\sqrt{1-4a}-1}{2}$. Если $a=0$, то $x_1=0$, $x_2=-1$. Если $0<a<\dfrac{1}{4}$, то $x_1=\dfrac{\sqrt{1-4a}-1}{2}$,

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Если $a=\dfrac{1}{4}$, то $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Если $a>\dfrac{1}{4}$, то

$$x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

2. Решить неравенство:

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{1+2x}-1.$$

Ответ: $0<x<\dfrac{45}{8}$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}\sin(x-y)&=3\sin x\cos y-1,\\ \sin(x+y)&=-2\cos x\sin y.\end{aligned}$$

Ответ: $x=\dfrac{k+n}{2}\pi+\dfrac{1}{2}(-1)^k\arcsin\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}(-1)^n\arcsin\dfrac{4}{5}$,

$$y=\frac{k-n}{2}\pi+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{4}{5},$$

где k и n — произвольные целые числа.

4. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C — точки, в которых секущая пересекает окружность. Найти $\operatorname{tg}\frac{\angle AOB}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2}$, если $OA=a$.

Ответ: $\frac{a-r}{a+r}$.

5. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если известны длина c стороны AB и прилежащие к ней углы A и B.

Ответ: $r_1=\frac{c\sin B}{2\sin A}$, $r_2=\frac{c\sin A}{2\sin B}$, $r_3=\frac{c\sin A\sin B}{2\sin^2(A+B)}$.

Вариант 3

1. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$$

найти только действительные корни).

Ответ: если $0<a\leqslant 1$, то $x=\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a}$.

2. Решить систему уравнений:

$$\cos x+\cos y=1,$$

$$\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

Ответ: $x=4k\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $y=2(2n+1)\pi$;

$x=2(2m+1)\pi$, $y=4s\pi\pm\frac{\pi}{2}$,

где k, n, m, s — произвольные целые числа.

3. Решить неравенство:

$$3\sin 2x>\sin x+\cos x+1.$$

Ответ: $2k\pi-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

где k и n — произвольные целые числа.

4. AOB — сектор круга радиуса r. Угол $AOB=\alpha$ $(\alpha<\pi)$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающейся хорды AB, дуги $\overset{\frown}{AB}$ и биссектрисы угла AOB.

Ответ: $4r\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$.

5. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус сфе-

ры, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.

Ответ: $r\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Вариант 4

1. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Ответ: если $a < -1$ — корней нет. Если $a = -1$, то $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Если $-1 < a < 0$, то $x = \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$,

$$x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$$

$$x = 2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}.$$

Если $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$,

$$x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x = 2\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Если $0 < a < \frac{1}{2}$, то $x = \arcsin\sqrt{1-a}$, $x = \pi - \arcsin\sqrt{1-a}$,

$$x = \pi + \arcsin\sqrt{1-a},\ x = 2\pi - \arcsin\sqrt{1-a},$$

$$x = \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$$

$$x = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x = 2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}.$$

Если $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$.

Если $\frac{1}{2} < a < 1$, то $x = \arcsin\sqrt{1-a}$, $x = \pi - \arcsin\sqrt{1-a}$,

$x = \pi + \arcsin\sqrt{1-a}$, $x = 2\pi - \arcsin\sqrt{1-a}$, $x = \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$,

$x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$, $x = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$, $x = 2\pi -$

$$- \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}.$$

Если $a=1$, то

$$x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi,\quad x=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},\quad x=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$x=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},\quad x=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Если $1<a<2$, то $x=\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$, $x=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$, $x=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$, $x=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$. Если $a=2$, то $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$. Если $a>2$, то корней нет.

2. Найти все действительные k, при которых решение системы

$$\begin{aligned} x-2y&=k,\\ 3x+y&=8 \end{aligned}$$

удовлетворяет условию $x>\frac{1}{k}$, $y>0$.

Ответ: $-8-\sqrt{71}<k<0$, $\sqrt{71}-8<k<\frac{8}{3}$.

3. Решить уравнение:

$$4\sin x+2\cos x=2+3\operatorname{tg}x.$$

Ответ: $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$, $x=2k\pi$,

$x=2k\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$,

где k и n — произвольные целые числа.

4. Даны две концентрические окружности радиусов r и R, $r<R$. Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, не проходящая через центр окружностей и пересекающая большую окружность в точках B и C. Пусть перпендикуляр к BC в точке P пересекает меньшую окружность в точке A. Найти сумму $PA^2+PB^2+PC^2$.

Ответ: $2(R^2+r^2)$.

5. Дан угол $\alpha\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ осевого сечения прямого кругового конуса с вершиной S и образующей длины l. Через точку A, взятую на основании конуса, проведена плоскость P, которая перпендикулярна к образующей SA. Через вершину конуса проведена плоскость Q. Эта плоскость перпендикулярна плоскости осевого сечения конуса, проходящего через SA, и составляет с образующей SA конуса угол β, $\left(\beta<\frac{\alpha}{2}\right)$. Плоскость Q рассекает конус по двум

образующим. Пусть продолжения этих образующих пересекают плоскость P в двух точках C_1 и C_2. Найти длину отрезка C_1C_2.

Ответ: $2l\dfrac{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\beta}$.

Вариант 5

1. Для каждого положительного a $(a\neq 1)$ решить уравнение:

$$(\log_a \sin x)^2+\log_a \sin x-a=0.$$

Ответ: если $0<a<1$, то $x=k\pi+(-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}}$, а если $a>1$, то

$$x=k\pi+(-1)^k \arcsin a^{\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}};$$

в обеих формулах k принимает все целые значения.

2. Решить неравенство:

$$1-\frac{\cos x}{4\cos^2 x-3}<\frac{1}{3-4\cos^2 x},\quad 0<x<\pi.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}<x<\dfrac{5\pi}{6}$,

$$\frac{\pi}{6}<x<\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

3. Найти коэффициент при x^n в разложении:

$$(1+x+2x^2+\ldots+nx^n)^2.$$

Ответ: $\dfrac{n(n^2+11)}{6}$.

4. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности s_1. Окружность s_2 имеет центр D и радиус DA. Из точки D проведены два луча, пересекающие окружность s_1 в точках P и Q, а дугу $\overset{\smile}{AB}$ окружности s_2, лежащую внутри окружности s_1, в точках M и N. Пусть P' и Q' — проекции точек P и Q на диаметр AB. Доказать, что фигура, ограниченная дугами $\overset{\smile}{PQ}$, $\overset{\smile}{MN}$ и отрезками MP и NQ, равновелика треугольнику $DP'Q'$.

5. Три сферы радиусов r, r и R внешним образом касаются друг друга, и все касаются некоторой плоскости. Найти радиус x сферы, касающейся данных сфер и этой плоскости.

Ответ: если $R\geqslant\dfrac{r}{4}$

и $R\neq r$, то $x_{1,2}=Rr\dfrac{(\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r})^2}{4(R-r)^2}$.

Вариант 6

1. Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$

будут действительными и оба корня будут больше a.

Ответ: $a < -2$.

2. Решить неравенство:

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2,$$

Ответ: $2k\pi + \arcsin\frac{1}{8} < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi - \arcsin\frac{1}{8},$$

$$(2k+1)\pi \leq x < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

3. Решить уравнение:

$$9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}.$$

Ответ: $x = \pm \log_3 2$.

4. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла x, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

Ответ: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}|\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C|$.

5. Две равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и касается обеих данных сфер. Дано отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из равных сфер. Найти величину α двугранного угла. В каких границах может изменяться m?

Ответ: $\frac{1}{4} < m < 1$, $\alpha = 2\arcsin\frac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}$.

Вариант 7

1. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0.$$

Ответ: если $a = -\frac{5}{4}$, то $x = 1$. Если $a < -\frac{5}{4}$, то

$$x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2-1} - a \pm \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2-1} - 5}\right)^2.$$

Если $a > -\frac{5}{4}$ — корней нет.

2. Решить неравенство:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $k\pi - \frac{\pi}{3} < x < k\pi - \frac{\pi}{4}$,

$k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3}$,

где k принимает все целые значения.

3. Доказать, что число

$$\underbrace{111\ldots11}_{2n \text{ единиц}} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ двоек}}$$

есть квадрат целого числа.

4. Из точки A, лежащей на окружности радиуса r, проведены две хорды AB и AC. Эти две хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A. Дана длина b большей хорды и угол $BAC = \alpha$. Найти радиус x окружности, которая касается хорд AB, AC и дуги $\overset{\smile}{BC}$.

Ответ: $x = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(b \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r\right)$.

5. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения конуса равен 2α. Найти двугранный угол φ между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Если $\alpha > \frac{\pi}{4}$, то конусы не имеют общей касательной плоскости (кроме той, которая касается их по общей образующей).

Вариант 8

1. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$x^2 + |x| + a = 0$$

(найти только действительные корни).

Ответ: если $a \leqslant 0$, то $x = \pm \frac{\sqrt{1-4a}-1}{2}$, а если $a > 0$, то корней нет.

2. Решить неравенство:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} > 2.$$

Ответ: $k\pi - \operatorname{arctg} 2 < x < k\pi - \frac{\pi}{4}$.

3. Сколькими способами можно выбрать из ста первых натуральных чисел три таких, сумма которых делилась бы на три (порядок слагаемых не учитывается)?

Ответ: 55922.

4. На одной из сторон угла, равного α, даны две точки, расстояния которых до другой стороны равны b и c. Найти радиус окружности, проходящей через эти две точки и касающейся другой стороны.

Ответ: $\frac{b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$.

5. Угол между образующей прямого кругового конуса и его высотой равен α. Найти угол φ между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}} \left(0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 9

1. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_2(2-x).$$

Ответ: $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$.

2. Решить систему уравнений:

$$\sin x = \sin 2y, \quad \cos x = \sin y;$$
$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $y_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = 0$, $y_2 = \frac{\pi}{2}$.

3. Для каждого отрицательного числа m решить уравнение:

$$4^x - 4m2^x + 2m + 2 = 0.$$

Ответ: только при $m < -1$ уравнение имеет один корень:

$$x = \log_2 (2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}).$$

4. В треугольнике ABC даны углы A, B, C и радиус R описанной вокруг него окружности. Внутри этого треугольника взяты две точки P и Q, такие, что $\angle PCA = \angle QCB = \frac{C}{3}$, $\angle PAC = \frac{A}{3}$, $\angle QBC = \frac{B}{3}$.

Найти площадь треугольника PQC.

Ответ: $2R^2 \dfrac{\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin A \sin B}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}$.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = b$, а угол $BAC = \alpha$. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину A, так, что угол между этой осью и плоскостью треугольника равен β, а основание треугольника перпендикулярно оси. Вычислить объем тела, полученного при вращении треугольника.

Ответ: $\frac{\pi b^3}{3} \cos\beta \cos\frac{\alpha}{2} \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Вариант 10

1. Решить уравнение:

$$(x + 1)(|x| - 1) = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$, $x_2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни квадратного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0,$$

вычислить:

$$\sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta).$$

Ответ: q.

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-1 \leqslant x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

4. В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB, с центральным углом $\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ вписан квадрат так, что две его со-

седние вершины лежат на радиусе OA, третья вершина — на радиусе OB, а четвертая вершина — на дуге $\overset{\smile}{AB}$. Найти отношение площадей квадрата и сектора.

Ответ: $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha)}$.

5. Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса $\left(\beta<\dfrac{\alpha}{2}\right)$ проведена плоскость. Найти угол x между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

Ответ: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 11

1. Решить неравенство:

$$\frac{2}{x}>x+1.$$

Ответ: $x<-2$, $0<x<1$.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{\sin x}+\cos x=0.$$

Ответ: $x=(2k+1)\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

где k принимает все целые значения.

3. Найти все действительные решения системы:

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=y,\quad \frac{2y^2}{1+y^2}=x.$$

Ответ: все решения данной системы: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=1$;

$x_3=\dfrac{-1-2i}{5}$, $y_3=\dfrac{-1+2i}{5}$; $x_4=\dfrac{-1+2i}{5}$, $y_4=\dfrac{-1-2i}{5}$.

4. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, катеты которого равны a ($CA=CB=a$), взята точка P такая, что $\angle PAC=\dfrac{\pi}{12}$, $\angle PBC=\dfrac{\pi}{24}$. Найти расстояние от точки P до центра вписанной окружности.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}a$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна диагонали этого

квадрата. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найти периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

Ответ: $3a$.

Вариант 12

1. Решить неравенство:

$$x^{\frac{1}{\lg x}} \lg x < 1.$$

Ответ: $0 < x < 1$, $1 < x < \sqrt[10]{10}$.

2. Решить уравнение:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg} x \cos 2x.$$

Ответ: $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, где k принимает все целые значения.

3. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}} - \sqrt[4]{\frac{1+x}{a-x}} = 2.$$

Ответ: если $a \neq -1$, то данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}.$$

Если $a = -1$, то корней нет.

4. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них внешним образом касается двух других. Радиусы окружностей относятся как 1 : 2 : 3. Вычислить углы треугольника, вершины которого расположены в точках касания.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 3$.

5. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$.

§ 43. Механико-математический факультет, 1965 г.

(Решение и обобщение некоторых геометрических задач)

Вариант 1, задача 2. Заметим, что решение задачи и ответ не меняются если предположить, что в основании пирамиды лежит параллелограмм $ABCD$, а вершина S — произвольная точка пространства (не лежащая, конечно, на плоскости $ABCD$). Итак, проведем плоскость через точки A, B и середину E отрезка SC. Эта

плоскость пройдет и через середину F отрезка SD (рис. 75) и пересечет грань SCD по средней линии EF треугольника SDC. Рассмотрим многогранник, ограниченный основанием $ABCD$, двумя трапециями $AFEB$, $DFEC$ и двумя треугольниками AFD и BEC. Проведем плоскость ADE. Тогда этот многогранник разобьется на пирамиду $EABCD$, объем которой равен $\frac{1}{2}$ объема данной пирамиды, и на пирамиду $ADEF$. Так как пл. $\triangle SEF$ = пл. $\triangle FED$ есть $\frac{1}{4}$ площади треугольника SDC, то объем пирамиды $ADFE$ равен $\frac{1}{4}$ объема пирамиды $ASDC$ или пирамиды $SADC$, иначе, объем

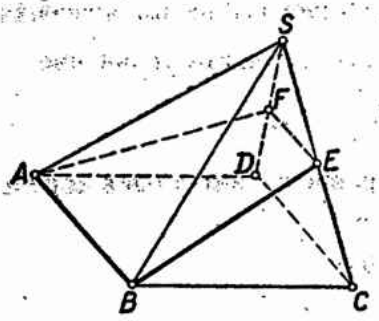


Рис. 75

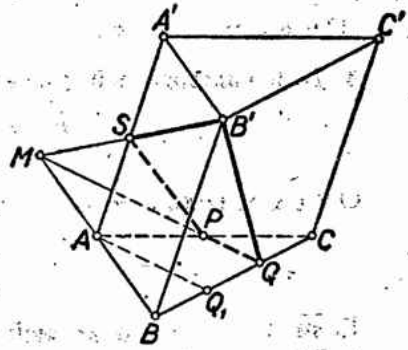


Рис. 76

пирамиды $ADFE$ равен $\frac{1}{8}$ объема данной пирамиды. Отсюда следует, что объем указанного выше многогранника равен $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ объема данной пирамиды. Объем пирамиды $SABEF$ равен поэтому $\frac{3}{8}$ объема данной пирамиды, и потому секущая плоскость делит объем данной пирамиды в отношении 3 : 5.

Вариант 2, задача 2. Заметим, что ни решение, ни ответ не изменятся, если считать, что треугольная призма $ABC\,A'B'C'$ произвольная (рис. 76). Дадим решение задачи, считая данную треугольную призму произвольной. Пусть P — середина отрезка AC. Плоскость $MB'P$ пересечет ребро AA' в его середине S. Секущая плоскость отсечет от призмы многогранник, который можно разбить на четырехугольную пирамиду $B'ABQP$ (B' — вершина, Q — точка пересечения прямых MP и BC) и треугольную пирамиду $PASB'$. Так как объем треугольной призмы, положенной на боковую грань ($ABB'A'$), равен половине произведения площади основания на высоту и так как площадь треугольника ASB'

равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABB'A'$, а $AP = \frac{1}{2} AC$, то объем пирамиды $PASB'$ равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} v = \frac{v}{12}$, где v — объем данной призмы.

Далее, проведем через точку A прямую $AQ_1 \parallel MQ$, и пусть Q_1 — точка пересечения этой прямой с прямой BC. Тогда $BQ_1 = Q_1Q$, так как $BA = AM$ и $Q_1Q = QC$, так как $AP = PC$. Поэтому $CQ = \frac{1}{3} CB$, $CP = \frac{1}{2} AA'$ и, значит, пл. $\triangle CPQ = \frac{1}{6}$ пл. $\triangle CAB$, следовательно, пл. четырехугольника $APQB$ равна $\frac{5}{6} s$, где s — площадь треугольника ABC. Отсюда следует, что объем пирамиды $B'APQB$ равен $\frac{5v}{18}$.

Итак, секущая плоскость рассекает данную призму на части, объемы которых

$$\frac{v}{12} + \frac{5v}{18} = \frac{13v}{36} \text{ и } \frac{23v}{36}.$$

Отношение этих объемов равно 13 : 23.

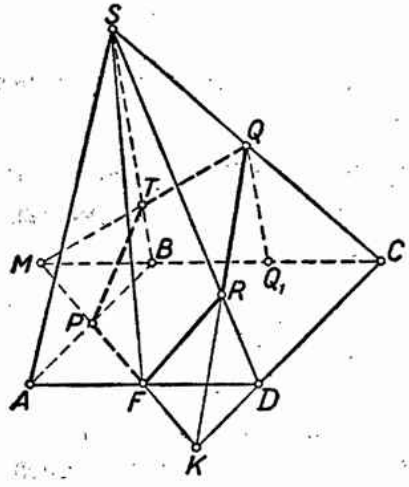


Рис. 77

Вариант 3, *задача* 2. Мы будем предполагать, что в основании пирамиды лежит параллелограмм $ABCD$, S — произвольная точка, не лежащая в плоскости этого параллелограмма. На рисунке 77 изображено сечение пирамиды данной плоскостью. Секущая плоскость пересекает основание $ABCD$ по отрезку PF, граничными точками которого являются середины отрезков AB и AD. Грань BSC — секущая плоскость — пересекает по отрезку TQ (T — точка пересечения SB и MQ, Q — середина SC); грань ASB — по отрезку TP. Пусть K — точка пересечения MP и CD, а R — точка пересечения KQ и SD; тогда секущая плоскость пересекает грань DSC по отрезку RQ, а грань ASD — по отрезку FR. Одна из частей, на которую секущая плоскость рассекает пирамиду, может быть разбита на 4 пирамиды:

$$SAPF,\ SPTQ,\ SPQR,\ SPRF.$$

Объем пирамиды $SAPF$ равен $\frac{1}{9}$ объема данной, так как пл. $APF = \frac{1}{8}$ пл. $\square ABCD$.

Теперь заметим, что если дана треугольная пирамида $S\alpha\beta\gamma$ и ее ребра $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ разделить точками α', β', γ' так, что

$$\frac{S\alpha'}{S\alpha} = \lambda, \quad \frac{S\beta'}{S\beta} = \mu, \quad \frac{S\gamma'}{S\gamma} = \nu,$$

то отношение объема пирамиды $S\alpha'\beta'\gamma'$ к объему пирамиды $S\alpha\beta\gamma$ будет равно $\lambda\mu\nu$.

Проведем через точку Q прямую, параллельную BT, и пусть эта прямая пересечет прямую BC в точке Q_1.

Тогда

$$TB = \frac{1}{2} QQ_1 = \frac{1}{4} SB,$$

значит,

$$\frac{ST}{SB} = \frac{3}{4}.$$

Далее,

$$\text{пл. } \triangle PBC = \frac{1}{4} \text{ пл. } \square ABCD, \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{2},$$

и поэтому объем пирамиды $SPFQ$ равен $^3/_{32}$ объема данной. Так как пл. $\triangle PCD = \frac{1}{2}$ пл. $\square ABCD$, $\frac{SR}{SD} = \frac{3}{4}$ (это доказывается точно так же, как выше было доказано, что $\frac{ST}{SB} = \frac{3}{4}$), $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{2}$, то объем пирамиды $SPQR$ равен $^3/_{16}$ объема данной.

Наконец, так как

$$\text{пл. } \triangle PFD = \frac{1}{2} \text{ пл. } \square ABCD, \frac{SR}{SD} = \frac{3}{4},$$

то объем пирамиды $STRF$ равен $^3/_{32}$ объема данной.

Итак, объем отсеченной части равен половине объема данной, так как

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{1}{2}.$$

Искомое отношение равно 1 : 1.

Вариант 4, задача 2. Ни решение, ни ответ задачи не изменятся, если считать, что $ABCD$ — произвольный параллелограмм, а

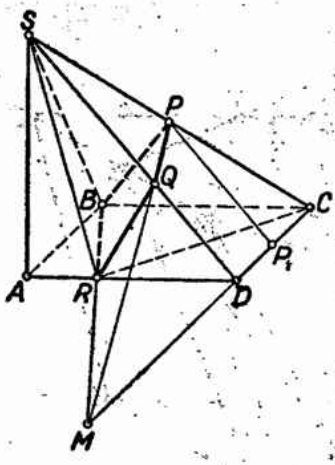


Рис. 78

S — произвольная точка, не лежащая в его плоскости. На рисунке 78 изображено сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку M, через точку B и середину P ребра BC. Одна из частей, которая этой плоскостью отсекается от данной пирамиды $SABCD$, может быть разбита на пирамиды $SABR$, $SRBP$ и $SRPQ$. Объем пирамиды $SABR$ равен $^1/_6$ объема данной пирамиды, так как $AR = \frac{AD}{3}$. Объем пирамиды $SRBP$ равен объему пирамиды $SRBC$, умноженной на $\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}$, а так как пл. $\triangle RBC$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то объем пирамиды $SRBP$ равен $^1/_4$ объема данной пирамиды. Наконец, объем пирамиды $SRPQ$ равен объему пирамиды $SRDC$, умноженной на $\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}$ и на $\frac{SQ}{SD} = \frac{3}{5}$. В самом деле, проведем через точку P прямую, параллельную прямой SD, и пусть она пересекает прямую CD в точке P_1. Тогда

$$PP_1 = \frac{1}{2}SD, \quad \frac{PP_1}{QD} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \quad QD = \frac{5}{4}PP_1 = \frac{2}{5}SD,$$

$$SQ = \frac{3}{5}SD \text{ и, значит, } \frac{SQ}{SD} = \frac{3}{5}.$$

Но так как пл. $\triangle RDC$ равна $^1/_3$ площади параллелограмма $ABCD$, то объем пирамиды $SRPQ$ равен $^1/_{10}$ объема данной пирамиды. Таким образом, объем одной из частей, которую данная плоскость отсекает от данной пирамиды, равен

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{31}{60}$$

объема данной пирамиды. Значит, объем другой части равен $^{29}/_{60}$ этого объема, а отношение этих объемов равно 31 : 29.

Вариант 5, задача 2. Ни решение, ни ответ не меняются, если считать, что призма $ABCA'B'C'$ произвольная (но грани ABC и

$A'B'C'$ предполагаются параллельными). Дадим решение задачи при этом предположении. На рисунке 79 изображено сечение данной призмы данной плоскостью. Рассмотрим ту часть призмы, которая содержит ребро AA'. Эту часть можно разбить в сумму объемов следующих пирамид: $SA'B'T$, $SA'TP$, $A'RSP$, $QRA'P$ и $A'RAQ$. Так как $B'S=\frac{1}{2}B'B$, а $B'T=\frac{1}{4}B'C'$ (это следует из того, что P — середина отрезка $A'C'$, а $\frac{MB'}{B'A'}=\frac{1}{2}$), то площадь треугольника $SB'T$ равна $^1/_{16}$ площади грани $BB'C'C$, а, значит, объем первой пирамиды $A'SB'T$ равен

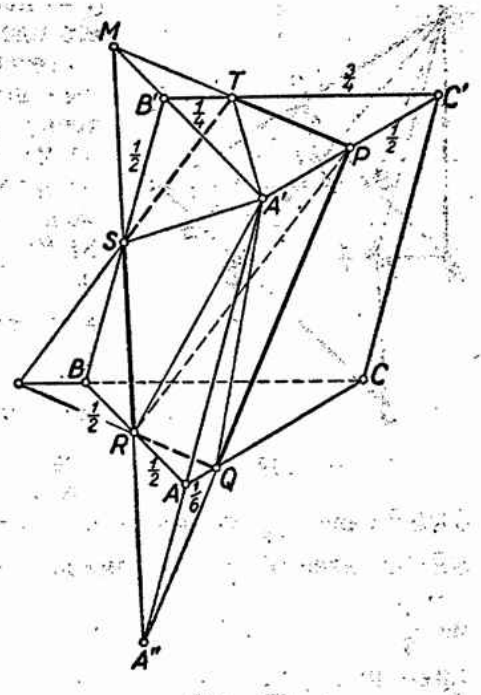


Рис. 79

$$\frac{1}{16}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

объема данной призмы. Далее, пл. $\triangle A'TP=\frac{3}{8}$ пл. $\triangle A'B'C'$, значит, объем второй пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$ объема данной призмы. Далее, $\frac{RS}{RM}=\frac{1}{2}$ и площадь треугольника $MA'P$ равна $^3/_4$ площади треугольника $A'B'C'$, значит, объем третьей пирамиды $RA'SP$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$ объема данной призмы. Далее, площадь треугольника $QA'P$ равна площади треугольника $AA'P$ и равна $^1/_4$ площади грани $AA'C'C$. Значит, объем четвертой пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{12}$ объема данной призмы. Наконец, так как

$$\frac{AQ}{A'P}=\frac{A''A}{A''A'}=\frac{AR}{A'M}=\frac{1}{3},$$

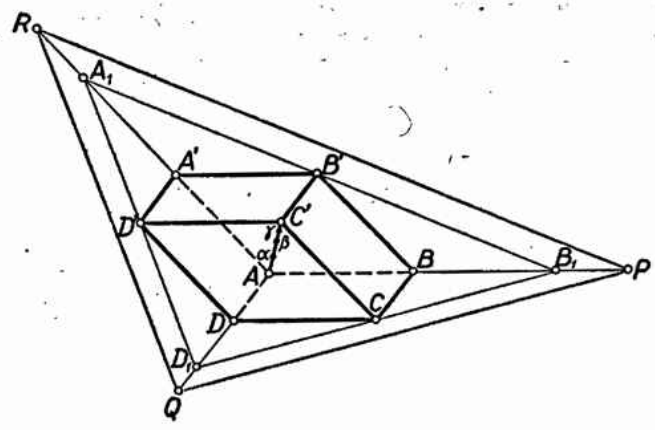


Рис. 80

то

$$AQ = \frac{1}{3} A'P = \frac{1}{6} A'B' = \frac{1}{6} AB$$

и поэтому площадь треугольника RAQ равна 1/12 площади треугольника ABC, значит, объем пирамиды $A'RAQ$ равен 1/36 объема призмы. Итак, объем рассматриваемой части равен

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{49}{144}$$

объема данной призмы. Таким образом, отношение частей, на которые данная плоскость делит данную призму, равно 49 : 95.

Вариант 6, задача 2. Ни решение задачи, ни результат не изменяются, если вместо куба взять произвольный параллелепипед, но на продолжении ребер AB, AD и AA' соответственно за точки B, D и A' откладывать отрезки BP, DQ и $A'R$, соответственно равные $\frac{3}{2}AB$, $\frac{3}{2}AD$ и $\frac{3}{2}AA'$ (рис. 80). Теперь заметим, что плоскость $DA'B$ пересекает диагональ параллелепипеда в точке α такой, что $A\alpha = \frac{1}{3}AC'$ (между прочим, α — точка пересечения медиан треугольника $DA'B$). Если продолжить ребра AB, AD и AA' за точки B, D и A' на расстояния $BB_1 = AB$, $DD_1 = AD$ и $A'A_1 = AA'$, то плоскость $D_1A_1B_1$ будет параллельна плоскости $DA'B$, пройдет через вершины D', B' и C параллелепипеда и пересечет его диагональ AC' в точке β такой, что $A\beta = \frac{2}{3}AC'$ (между прочим, β — точка пересечения медиан треугольника $D'B'C$). Отсюда следует, что плоскость PQR пересечет диагональ AC' параллелепипеда в точке γ, являющейся серединой отрезка

$\beta C'$. Так как объем пирамиды $C'D'B'C$ равен 1/6 объема данного параллелепипеда, точка β лежит на ее основании, а γ — середина отрезка $C'\beta$, то плоскость PQR, параллельная плоскости $D'B'C$, отсечет от пирамиды $C'D'B'C$ пирамиду, объем которой равен $(1/2)^3 = 1/8$ объема этой пирамиды и, значит, 1/48 объема данного параллелепипеда. Отсюда следует, что плоскость PQR разделит объем параллелепипеда в отношении 1 : 47.

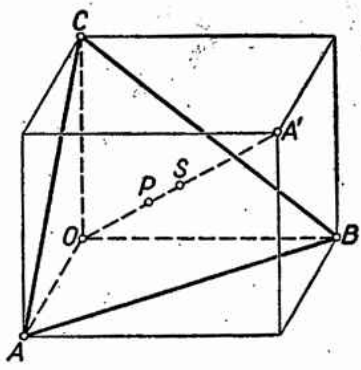


Рис. 81

Вариант 7, задача 2. Пусть $OABC$ — треугольная пирамида, такая, что (рис. 81) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$. Построим прямоугольный параллелепипед с ребрами OA, OB, OC. Его диагональ OA' пересекает плоскость ABC в точке P, являющейся точкой пересечения медиан треугольника ABC. С другой стороны, середина S отрезка OA' является центром построенного параллелепипеда и она равноудалена от всех вершин этого параллелепипеда; в частности, $SA = SB = SC = SO$. Точки O, P, S лежат на одной прямой.

§ 44. Физический факультет, 1965 г.

(Решение и анализ некоторых геометрических задач)

Вариант 5, задача 4. Рассмотрим два случая: лучи DP и DQ находятся по одну сторону от диаметра DC (рис. 82) и по разные стороны от него (рис. 83). Так как площадь кругового сектора равна половине квадрата радиуса, умноженной на угол сектора, то

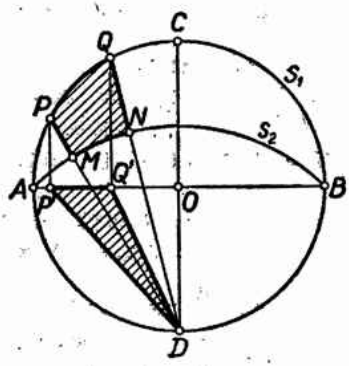


Рис. 82

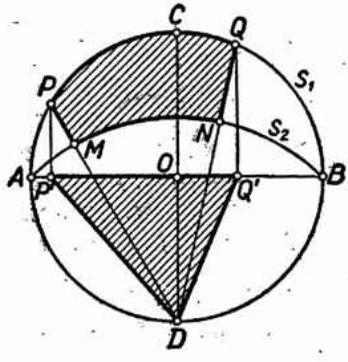


Рис. 83

площади круговых секторов DMN и OPQ равны между собой ($\angle POQ = 2\angle DPQ$, но $DM = \sqrt{2} \cdot OP$). Далее, площадь, о которой говорится в условии задачи, равна разности площадей $\overset{\smile}{DPQ}$ и $\overset{\smile}{DMN}$, или разности площадей $\overset{\smile}{DPQ}$ и $\overset{\smile}{OPQ}$, или разности площадей треугольников DPQ и OPQ, так как фигуры $\overset{\smile}{DPQ}$ и $\overset{\smile}{OPQ}$ имеют в качестве общей части сегмент с хордой PQ. В случае, изображенном на рисунке 82, разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна разности площадей треугольников DPK и OQK (K — точка пересечения OP и DQ) или разности площадей треугольников DPO и DQO. Но пл. $\triangle DPO$ = пл. $\triangle DP'O$, пл. $\triangle DQO$ = пл. $\triangle DQ'O$, разность площадей треугольников $DP'O$ и $DQ'O$ равна площади треугольника $DP'Q'$.

В случае, изображенном на рисунке 83, дело обстоит проще: разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна сумме площадей треугольников DPO и DQO, которые соответственно равновелики треугольникам $DP'O$ и $DQ'O$. Сумма же площадей этих последних треугольников равна площади треугольника $DP'Q'$.

Замечание. Утверждение задачи верно и в том случае, если одна из точек P или Q совпадает с точкой C.

*Вариант 5, задача 5**

Решение.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Для того чтобы две сферы** (T_1, μ_1) и (T_2, μ_2) касались друг друга внешним образом, необходимо и достаточно, чтобы длина отрезка S_1S_2, ограниченного точками прикосновения к данным сферам плоскости (p), которая касается их обеих, была бы равна $2\sqrt{\mu_1\mu_2}$:

$$S_1S_2 = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}.$$

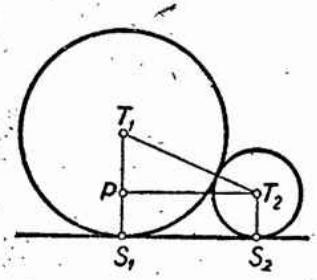


Рис. 84

Доказательство необходимости. Предположим, что сферы (T_1, μ_1) и (T_2, μ_2) касаются внешним образом. Обозначим через S_1 и S_2 точки прикосновения к ним плоскости (p), которая касается обеих сфер (рис. 84). Пусть P — пря-

* Приводимое ниже решение принадлежит студентке физического факультета МГУ Ивановой Е. В.

** Символом (G, ρ) мы будем обозначать сферу с центром в точке G и радиусом ρ.

моугольная проекция центра T_2 сферы (T_2, μ_2) на прямую T_1S_1. Тогда

$$PT_2^2 = T_1T_2^2 - PT_1^2 =$$
$$= (\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 = 4\mu_1\mu_2;$$

но $PT_2 = S_1S_2$,

поэтому

$$S_1S_2 = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}.$$

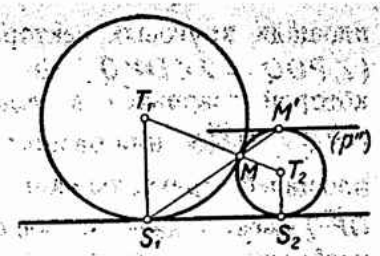


Рис. 85

Доказательство достаточности. Предположим, что к сферам (T_1, μ_1) и (T_2, μ_2) можно провести плоскость (p), касающуюся их обеих соответственно в точках S_1 и S_2, причем длина отрезка S_1S_2 равна $2\sqrt{\mu_1\mu_2}$:

$$S_1S_2 = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}.$$

Докажем, что сферы (T_1, μ_1) и (T_2, μ_2) касаются друг друга внешним образом.

Построим сферу (σ), касающуюся плоскости (p) в точке S_1 и сферы (T_2, μ_2) внешним образом. Такая сфера существует, и притом только одна*. Ее радиус x равен $2\sqrt{x\mu_2} = S_1S_2 = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}$, откуда $x = \mu_1$, т. е. сфера (σ) совпадает со сферой (T_1, μ_1).

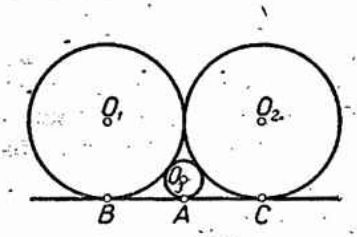


Рис. 86

1°. Исследуем, в каких границах может изменяться R, если r фиксировано.

Обозначим точки прикосновения сфер (O_3, R), (O_1, r) и (O_2, r) с плоскостью (p) соответственно через A, B и C. Тогда

$$AB = AC = 2\sqrt{Rr}, \quad (1)$$

$$BC = 2r. \quad (2)$$

* Доказать это можно так: рассмотрим инверсию с центром S_1 и степенью инверсии, равной $S_1S_2^2$. При этой инверсии сфера (T_2, μ_2) перейдет в себя, а сфера (σ), касающаяся плоскости (p) в точке S_1, перейдет в плоскость (p'), параллельную плоскости (p). Сфера (σ) и сфера (T_2, μ_2) будут касаться тогда и только тогда, когда будут касаться плоскость (p') и сфера (T_2, μ_2). Но существует и притом только одна плоскость (p'), параллельная плоскости (p) и касающаяся сферы (T_2, μ_2). Значит, существует и притом только одна сфера (σ), касающаяся сферы (T_2, μ_2). На рисунке 85 изображено построение сечения сферы (σ) плоскостью $T_1T_2S_1S_2$; проводим касательную (p''), параллельную прямой (p'), по которой пересекаются плоскости $T_1T_2S_1S_2$ и (p); точку прикосновения M' соединяем с S_1; пусть M — точка, в которой эта прямая пересекает сферу (T_2, μ_2). Центр сферы (σ) лежит на пересечении прямой T_2M с прямой, проходящей через точку S_1 перпендикулярно плоскости (p) (рис. 85).

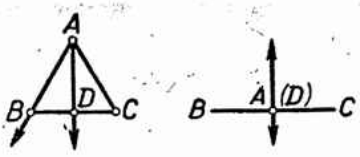


Рис. 87

Если $\triangle ABC$ не является вырожденным, то

$$AB + AC > BC$$

и

$$AB = AC > \frac{BC}{2}$$

или

$$2\sqrt{Rr} > r,$$

откуда

$$R > \frac{r}{4}.$$

Если $\triangle ABC$ вырожденный (рис. 87), то

$$AB + AC = BC,$$

или $AB = AC = \frac{BC}{2}$, или $2\sqrt{Rr} = r$,

откуда

$$R = \frac{r}{4}.$$

Таким образом, для того чтобы задача могла иметь решение, *необходимо*, чтобы выполнялось условие:

$$R \geqslant \frac{r}{4}.$$

Это условие, как будет показано, и достаточно, т. е. если сферы радиусов r, r и R касаются друг друга внешним образом и, кроме того, касаются некоторой плоскости (p), то в случае $R \geqslant \frac{r}{4}$ существуют и притом только две (в случае $R \neq r$) различные сферы, касающиеся трех данных и плоскости (p).

Пусть данные сферы радиусов r, r, R касаются плоскости (p) соответственно в точках B, C и A. Выберем на прямой AB положительное направление от A к B. На медиатрисе AD отрезка BC (D — середина отрезка BC) выберем положительное направление от A к D, если эти точки различны, и произвольное, если они совпадают (рис. 88).

На основании доказанного выше существует сфера (G, ρ), касающаяся данных трех сфер внешним образом и плоскости (p) только тогда, когда существует на плоскости (p) точка M и существует положительное число ρ, такие, что

$$AM = 2\sqrt{R\rho},$$

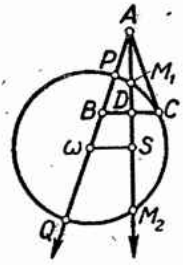


Рис. 88

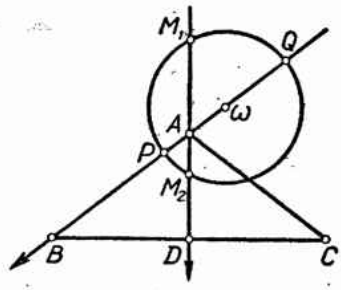


Рис. 89

$$BM = CM = 2\sqrt{r\rho}.$$

Если существует точка M, удовлетворяющая этим соотношениям, то

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}, \quad BM = CM,$$

т. е., с одной стороны, точка M принадлежит окружности Аполлония (в случае $R \neq r$) с предельными точками A и B, причем точка C принадлежит этой окружности (ω), так как

$$\frac{AC}{CB} = \frac{2\sqrt{Rr}}{2r} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}. \qquad (\alpha)$$

Если точка B лежит внутри окружности (ω), то отрезок BC лежит внутри этой окружности (точка C лежит на самой окружности), поэтому медиатриса AD отрезка BC пересекается с окружностью (ω) (рис. 88). Если же внутри окружности (ω) лежит точка A, то *любая* прямая, проходящая через точку A, в том числе и медиатриса AD отрезка BC, пересекает окружность (ω) в двух различных точках (рис. 89).

Наконец, если $R = r$, то окружность (ω) вырождается в медиатрису отрезка AB и последняя, конечно, пересекается с медиатрисой отрезка BC. Итак, всегда существует (может быть даже две) точка M, для которой

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}, \quad BM = CM.$$

Тогда, полагая

$$BM = CM = 2\sqrt{r\rho},$$

найдем ρ, а тогда

$$AM = BM\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{r\rho}\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{\rho R},$$

а это означает, что сфера радиуса ρ, касающаяся плоскости (p) в точке M и имеющая радиус ρ, касается внешним образом и трех данных сфер. Если точек M, удовлетворяющих соотношению (α), две, то и искомых сфер тоже две.

Итак, в случае $R \geqslant \frac{r}{4}$ всегда *существует* сфера, касающаяся плоскости (p) и касающаяся трех данных сфер внешним образом.

Перед тем как вычислить радиус искомой сферы (сфер), исследуем положение точки (точек) прикосновения искомой сферы (сфер) с плоскостью (p).

Пусть $R \neq r$. Тогда искомых сфер две. Построим на оси $\overrightarrow{AB}$ точки P и Q, такие, что*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}, \tag{3}$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = -\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}}. \tag{4}$$

Найдем $\overline{AM}_1$ и $\overline{AM}_2$.

Из равенства (3) следует, что

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R}},$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} + 1 = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R}} + 1,$$

$$\frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R}}.$$

Далее, применяя теорему Шаля**, получим:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R}},$$

откуда

$$\overline{AP} = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}. \tag{5}$$

Аналогично из равенства (4) найдем, что

---

* Через $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, ... мы обозначаем координаты направленных отрезков $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, ... , лежащих на оси $\overrightarrow{AB}$.

** Для трех любых точек A, B, C, лежащих на оси, выполняется соотношение $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (теорема Шаля).

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}}. \tag{6}$$

Докажем, что

$$\overrightarrow{A\omega} = \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}}{2} \tag{7}$$

Использовав теорему Шаля, получим:

$$\overrightarrow{A\omega} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{P\omega}. \tag{7'}$$

Еще раз применив теорему Шаля, найдем, что

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{P\omega} + \overrightarrow{\omega Q},$$

но так как $\overrightarrow{P\omega} = \overrightarrow{\omega Q}$, то

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{P\omega},$$

откуда

$$\overrightarrow{P\omega} = \frac{\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}}{2}. \tag{7''}$$

Из равенств (7') и (7'') следует равенство (7).

Пусть S — проекция точки ω на прямую AD, тогда

$$\overrightarrow{M_1S} = \overrightarrow{SM_2}.$$

Аналогично предыдущему доказывается, что и

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}}{2}. \tag{8}$$

Так как D — проекция точки B на ось $\overrightarrow{AD}$, а S — проекция точки ω на эту же ось, то $\triangle ABD$ и $\triangle A\omega S$ гомотетичны (A — центр гомотетии). Поэтому

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\omega}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AS}},$$

или, так как в силу выбора положительных направлений на осях $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеем $\overrightarrow{AB} > 0$ и $\overrightarrow{AD} > 0$,

$$\frac{AB}{\overrightarrow{A\omega}} = \frac{AD}{\overrightarrow{AS}},$$

откуда

$$\overrightarrow{AS} = \frac{AD}{AB} \cdot \overrightarrow{A\omega}.$$

Из равенств (1) и (2) найдем AD:

$$AD = \sqrt{4Rr - r^2}$$

(так как $R \geqslant \frac{r}{4}$, то под радикалом находится неотрицательное число). Из равенства (7), используя равенства (5) и (6), найдем $\overline{A\omega}$:

$$\overline{A\omega} = \frac{\dfrac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}} + \dfrac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}}{2} = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}.$$

Отсюда

$$\overline{AS} = \frac{\dfrac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}\sqrt{4Rr-r^2}}{2\sqrt{Rr}} = \frac{R\sqrt{4Rr-r^2}}{R-r}.$$

Поэтому, использовав равенство (8), найдем:

$$\frac{\overline{AM_1}+\overline{AM_2}}{2} = \frac{R\sqrt{4Rr-r^2}}{R-r},$$

откуда

$$\overline{AM_1}+\overline{AM_2} = \frac{2R\sqrt{4Rr-r^2}}{R-r}. \qquad (9)$$

Степень* точки A относительно окружности (ω) равна:

$$\sigma = \overline{AM_1}\cdot\overline{AM_2},$$

в то же время

$$\sigma = \overline{AP}\cdot\overline{AQ},$$

поэтому

$$\overline{AM_1}\cdot\overline{AM_2} = \overline{AP}\cdot\overline{AQ}.$$

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$\overline{AP}\cdot\overline{AQ} = \frac{4R^2r}{R-r},$$

откуда

$$\overline{AM_1}\cdot\overline{AM_2} = \frac{4R^2r}{R-r}. \qquad (10)$$

На основании равенств (9) и (10) заключаем, что $\overline{AM_1}$ и $\overline{AM_2}$ являются корнями уравнения:

$$(R-r)\,x^2 - 2R\sqrt{4Rr-r^2}\,x + 4R^2r = 0. \qquad (11)$$

Дискриминант уравнения (11) в случае $R \neq r$ всегда положителен:

---

* Степенью точки N относительно окружности (F) называется число σ, такое, что $\sigma = \overline{NK}\cdot\overline{NL}$, где K и L — точки пересечения окружности (F) *с любой осью*, проходящей через точку N.

$$\Delta = R^2(4Rr - r^2) - 4R^2r(R - r) = 3R^2r^2 > 0,$$

следовательно, уравнение (11) всегда имеет действительные и различные корни, т. е. в случае $R \neq r$ всегда существует две, и только две, различные точки, являющиеся центрами сфер, удовлетворяющих условию задачи; при этом

$$\overline{AM_i} = \frac{R\sqrt{4Rr - r^2} \pm Rr\sqrt{3}}{R - r}. \qquad (12)$$

Исследуем, по какую сторону от точки A на оси $\overrightarrow{AD}$ расположены точки M_1 и M_2. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $R > r$; тогда, как следует из равенств (9) и (10),

$$\overline{AM_1} + \overline{AM_2} > 0,$$
$$\overline{AM_1} \cdot \overline{AM_2} > 0.$$

Но если сумма и произведение двух чисел положительны, то эти числа также положительны, поэтому

$$\overline{AM_1} > 0, \quad \overline{AM_2} > 0,$$

т. е. точки M_1 и M_2 лежат на *луче* $\overrightarrow{AD}$.

2. Пусть $\frac{r}{4} < R < r$, тогда

$$\overline{AM_1} + \overline{AM_2} < 0, \quad \overline{AM_1} \cdot \overline{AM_2} < 0,$$

т. е. точки M_1 и M_2 расположены на прямой $\overrightarrow{AD}$ по разные стороны от точки A. Так как

$$\overline{AM_1} = \frac{-R\sqrt{4Rr - r^2} - Rr\sqrt{3}}{r - R} < 0,$$

$$\overline{AM_2} = \frac{-R\sqrt{4Rr - r^2} + Rr\sqrt{3}}{r - R} > 0,$$

то

$$|\overline{AM_1}| > |\overline{AM_2}|,$$

т. е. расстояние от точки M_1, лежащей на продолжении луча $\overrightarrow{DA}$ за точку A, больше расстояния от точки A до точки M_2, лежащей на луче $\overrightarrow{AD}$.

3. Пусть $R = \frac{r}{4}$; тогда

$$\overline{AM_1} + \overline{AM_2} = 0, \quad \overline{AM_1} \cdot \overline{AM_2} < 0,$$

т. е. точки M_1 и M_2 расположены на прямой AD по разные стороны от точки A на равных расстояниях от нее (рис. 90). Заметим, что в этом случае $\triangle ABC$ вырожденный и что радиусы искомых сфер равны между собой, причем их значение таково: $\rho_1 = \rho_2 = \frac{r}{3}$.

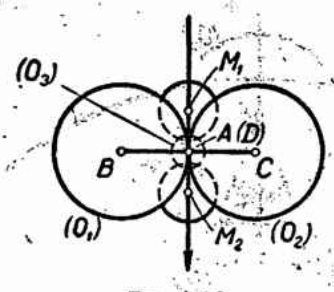


Рис. 90

Исследуем положение точек M_1 и M_2 относительно $\triangle ABC$.

Заметим, что так как точки M_1 и M_2 расположены на прямой AD, то в случае

$$\overline{AD} - \overline{AM_i} > 0,$$
$$\overline{AM_i} > 0$$

точка M_i расположена внутри $\triangle ABC$; если же

$$\overline{AD} - \overline{AM_i} = 0,$$

то точка M_i совпадает с точкой D; если или

$$\overline{AD} - \overline{AM_i} < 0,$$
$$\overline{AM_i} > 0,$$

или

$$\overline{AM_i} < 0,$$

то точка M_i расположена вне $\triangle ABC$.

Рассмотрим целую рациональную функцию от x:

$$y = (R - r)x^2 - 2R\sqrt{4Rr - r^2}\,x + 4R^2r. \qquad (13)$$

Будем считать, что $R \neq r$. Корнями этой функции, как уже было доказано, являются $\overline{AM_1}$ и $\overline{AM_2}$.

Найдем значение этой функции при $x = \overline{AD}$:

$$y(\overline{AD}) = (4Rr - r^2)(R - r) - 2R(4Rr - r^2) + 4R^2r = r^2(r - 3R). \qquad (14)$$

Пусть $R > r$. Тогда

$$y(\overline{AD}) < 0,$$

поэтому

$$\overline{AM_1} < \overline{AD} < \overline{AM_2}$$

(считаем, что $\overline{AM_1} < \overline{AM_2}$). В силу этого, а также того, что в случае $R > r$, $\overline{AM_1} > 0$ и $\overline{AM_2} > 0$, заключаем, что

$$\overline{AD} - \overline{AM_1} > 0,$$
$$\overline{AM_1} > 0$$

и

$$\overline{AD} - \overline{AM_2} < 0,$$
$$\overline{AM_2} > 0.$$

Это означает, что точка M_1 лежит внутри $\triangle ABC$, а точка M_2 лежит вне его на продолжении луча $\overrightarrow{AD}$ за точку D (рис. 91).

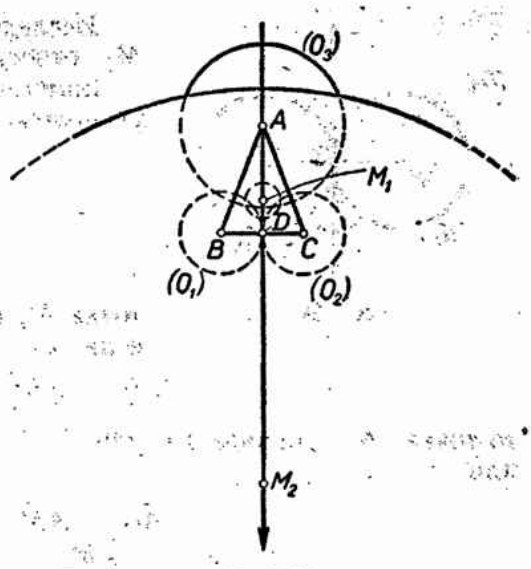


Рис. 91.

Пусть $\frac{r}{3} < R < r$.

Тогда

$$y(\overline{AD}) < 0,$$

следовательно ($\overline{AM_1} < \overline{AM_2}$, $\overline{AM_1} < 0$, $\overline{AM_2} > 0$, $\overline{AD} > 0$),

$$\overline{AD} > \overline{AM_2}.$$

Таким образом, имеем неравенства:

$$\overline{AD} - \overline{AM_2} > 0,$$

$$\overline{AM_2} > 0,$$

$$\overline{AM_1} < 0.$$

Отсюда следует, что точка M_2 лежит внутри $\triangle ABC$, а точка M_1 — вне его, на продолжении за точку A луча $\overrightarrow{DA}$ (рис. 92).

Пусть $R = \frac{r}{3}$. Тогда

$$y(\overline{AD}) = 0;$$

но $\overline{AM_1}$ и $\overline{AM_2}$ — корни функции y и если считать, как и выше, что $\overline{AM_1} < \overline{AM_2}$, то

$$\overline{AD} = \overline{AM_2}$$

или

$$\overline{AD} - \overline{AM_2} = 0,$$

т. е. точка M_2 совпадает с точкой D. Так как $\overline{AM_1} < 0$, то точка M_1 лежит на продолжении луча $\overrightarrow{DA}$ за точку A (рис. 93).

Пусть $\frac{r}{4} \leqslant R < \frac{r}{3}$. Тогда

$$y(\overline{AD}) < 0,$$

т. е.

$$\overline{AM_1} < \overline{AD} < \overline{AM_2}.$$

Имеем:

$$\overline{AD} - \overline{AM}_2 < 0,$$
$$\overline{AM}_2 > 0,$$
$$\overline{AM}_1 < 0.$$

Отсюда заключаем, что и точка M_1, и точка M_2 лежат вне $\triangle ABC$, а именно вне отрезка AD — одна на продолжении его за точку A, другая — за точку D (рис. 94).

Найдем радиусы искомых сфер. Как следует из леммы (достаточность),

$$AM_i = 2\sqrt{R\rho_i},$$

но из равенства (12) имеем:

$$\overline{AM}_i = \frac{R\sqrt{4Rr - r^2} \pm Rr\sqrt{3}}{R - r},$$

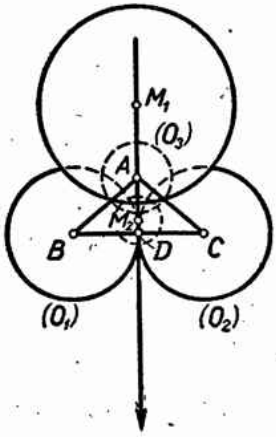


Рис. 92

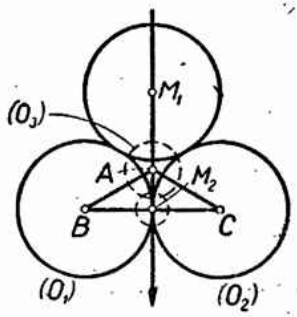


Рис. 93

поэтому

$$2\sqrt{R\rho_i} = \left|\frac{R\sqrt{4Rr - r^2} \pm Rr\sqrt{3}}{R - r}\right|,$$

$$\sqrt{\rho_i} = \left|\frac{R\sqrt{4Rr - r^2} \pm Rr\sqrt{3}}{2\sqrt{R}\,(R - r)}\right|,$$

$$\rho_i = \frac{R}{4}\left(\frac{\sqrt{4Rr - r^2} \pm r\sqrt{3}}{R - r}\right)^2. \qquad (15)$$

Рассмотрим случай, когда $R = r$. При этом $\triangle ABC$ является равносторонним (рис. 95):

$$AB = BC = CA = 2r.$$

Так как

$$AM = 2\sqrt{r\rho},$$

$$BM = 2\sqrt{r\rho},$$

$$CM = 2\sqrt{r\rho},$$

то M — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, т. е., поскольку $\triangle ABC$ равносторонний, точка пересечения его биссектрис (или медиан, или высот).

Имеем систему:

$$AM = \frac{3}{2}AD = \frac{2}{\sqrt{3}}r,$$

$$AM = 2\sqrt{r\rho},$$

откуда $\rho = \frac{r}{3}$.

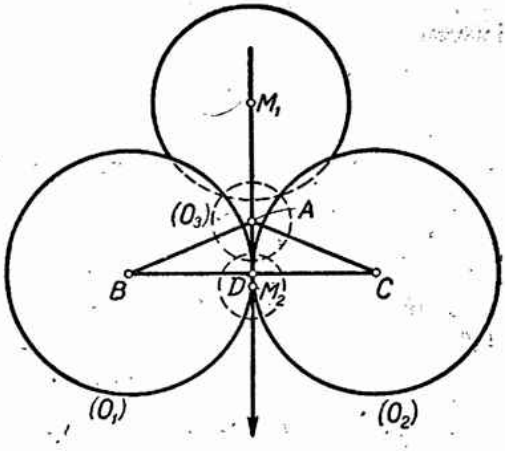


Рис. 91

Замечание. Положим в формуле (15) $R = \frac{r}{3}$, имеем: $\rho_1 = \frac{r}{4}$, $\rho_2 = r$. Если $R = \frac{r}{4}$, то $\rho_1 = \rho_2 = \frac{r}{3}$. Если $R = r$, то $\rho = \frac{r}{3}$.

Таким образом, для предельных случаев имеем:

1) если $R = r$, то существует только одна сфера радиуса $\frac{r}{3}$, касающаяся трех данных; точка касания этой сферы с плоскостью (p) является центром окружности (ABC);

2) если $R = \frac{r}{4}$, то существуют только две сферы радиуса $\frac{r}{3}$, касающиеся трех данных; точки касания этих сфер с плоскостью (p) расположены на медиатрисе отрезка BC, по разные стороны от нее на расстоянии $\frac{r}{\sqrt{3}}$;

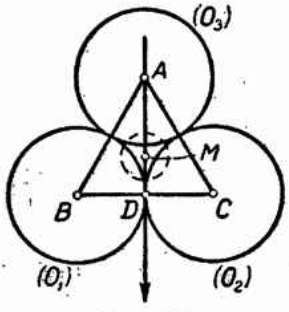


Рис. 95

3) если $R = \frac{r}{3}$, то существуют только две сферы радиусов $\rho_1 = r$ и $\rho_2 = \frac{r}{4}$, касающиеся трех данных; точки касания этих сфер с плоскостью (p) расположены на продолжении луча AD за точку A; точка касания сферы радиуса $\frac{r}{4}$ — середина BC, а точка касания сферы радиуса r такова, что $\triangle BCM_1$ равносторонний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ЗА 1968 ГОД (С ОТВЕТАМИ)

§ 45. Механико-математический факультет, 1968 г.

Вариант 1

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (вокруг трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри, или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти также отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.

Ответ: вне; $\frac{3}{5}\sqrt{14}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1.$$

Ответ: $x = -3$, $x > -1$.

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1.$$

Ответ: $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

4. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

5. Из пункта A в пункт C в 9 *ч* утра отправляется скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже чем через 3 *ч* после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 *ч* того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 *ч* после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

Ответ: 16 *ч* 30 *мин.*

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$\sin 3x = a \sin x + (4-2|a|) \sin^2 x$$

является корнем уравнения

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $0 \leqslant a < 1$, $a = 3$, $a = 4$, $a > 5$.

Вариант 2

1. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямых, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая перпендикулярна стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\log_3 (\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9 (4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|).$$

Ответ: $x = 4$, $0 < x \leqslant 1$.

3. Решить неравенство:

$$2 \operatorname{tg} 2x \leqslant 3 \operatorname{tg} x.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leqslant k\pi$, $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{96} a^3$.

5. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 *ч*. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 *ч*. Если бы собственная скорость (т. е. скорость в стоячей воде) моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь (т. е. путь от A до B и обратно) занял бы у лодки не более 7 *ч*. Найти время, за которое моторная лодка проходит путь из A в B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

Ответ: за 4 *ч*.

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$2 \sin^7 x - (1 - a) \sin^3 x + (2a^3 - 2a - 1) \sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$2 \sin^6 x + \cos 2x = 1 + a - 2a^3 + a \cos^2 x.$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a=-1$, $a=0$.

Вариант 3

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN=NC$ и $AM=2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5+\sqrt{3}$, угол $BAD=90°$ и угол $ABC=60°$.

Ответ: $AB=BC=2$, $AD=\sqrt{3}$, $DC=1$, $S=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x\geqslant 3$.

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{2+4\cos x}\geqslant\frac{1}{2}+3\cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

4. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAB и SAC в точках B и C, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B. Найти объем пирамиды SO_1BO_2.

Ответ: $\frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2-a^2}}$.

5. Из пункта A в пункт B выходит в 8 *ч* утра скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд в пункт B прибывает в 13 *ч* 50 *мин* того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее 10 *ч* 30 *мин* утра. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.

Ответ: 16 *ч* 45 *мин*.

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$a\cos 2x+|a|\cos 4x+\cos 6x=1$$

является корнем уравнения

$$\sin x\cos 2x=\sin 2x\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 5x$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a=0$, $a<-1$.

Вариант 4

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 1$ и $AD = 3$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (вокруг трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри, или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти также площадь описанного круга.

Ответ: внутри; $\frac{7}{3}\pi$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\log_{\sqrt{x}}(x + |x - 2|) = \log_x (5x - 6 + 5|x - 2|).$$

Ответ: $0 < x < 1$, $1 < x \leqslant 2$, $x = \frac{5}{2}$.

3. Решить неравенство:

$$\frac{2 + \sqrt{2} - 4\cos^2 x}{\sin x - \cos 2x} \geqslant 2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера с центром в точке O лежит над плоскостью основания $ABCD$, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти объем пирамиды $OABCD$.

Ответ: $\frac{a^3(2b - a)\sqrt{2}}{6\sqrt{2b^2 - a^2}}$.

5. В 7 ч утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляются катер и байдарка. Байдарка прибывает в пункт B в 17 ч этого же дня. Катер же, дойдя до пункта B, мгновенно повернул обратно и на своем пути из B в A встретил байдарку не позднее 15 ч, а прибыл в пункт A не ранее 23 ч того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если известно, что собственная скорость (т. е. скорость в стоячей воде) катера в два раза больше собственной скорости байдарки.

Ответ: 13 ч.

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$2\sin^7 x = (1 + \sin \pi a)\sin x + a\sin^3 x$$

является корнем уравнения

$$(a - 1)(1 + \cos^2 x) + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x + 2(a - 1)^3$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a = 1$, $a = 2$.

Вариант 5

1. В треугольнике ABC из вершин к противоположным сторонам проведены отрезки AM, BN и CP (M — точка на отрезке BC, N — на AC и P — на AB) так, что

$$\angle BAM = \frac{1}{3}\angle BAC,\ \angle CBN = \frac{1}{4}\angle CBA,\ \angle ACP = \frac{1}{5}\angle ACB.$$

Найти длины сторон BC и CA, если $AB = 1$, а получившийся в пересечении отрезков AM, BN и CP треугольник правильный.

Ответ: $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 48°$, $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 72°$;

далее (см. стр. 181, 182): $\sin 48° = \sin(30° + 18°) = \frac{1}{8}[\sqrt{3}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}]$, $\sin 72° = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$(x+4)\cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1)\cdot|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1.$$

Ответ: $x = -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{3 + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} > \frac{1 + 3\operatorname{tg} x}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi$.

4. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром $a\sqrt{2}$. Сфера проходит через точку A и касается боковых ребер SB и SC в их серединах. Найти радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{a}{4}\sqrt{\frac{23}{5}}$.

5. В 9 ч утра из пункта A выезжает велосипедист, который едет до пункта B. Через 2 ч после выезда велосипедиста из A в B выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт B, мгновенно поворачивает и едет из B в A. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт A в 17 ч того же дня (т. е. дня выезда велосипедиста). Найти время прибытия велосипедиста в пункте B, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

Ответ: 18 ч.

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x - |a-4|(1+\cos 2x)$$

является корнем уравнения

$$2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a=4$, $a>5$.

Вариант 6

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке N так, что $BM=MC$, $2AN=ND$ и $AM\perp BN$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 14, а угол $BAD=60^\circ$.

Ответ: $AB=CD=2$, $BC=4$, $AD=6$, $S=5\sqrt{3}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\log_4(6+\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|)=\frac{1}{2}+\log_2|\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2||.$$

Ответ: $x=\frac{1}{16}$, $x\geqslant 4$.

3. Решить неравенство:

$$\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x+\cos x}\leqslant 2.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$,

$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\pi+2k\pi$,

$\pi+2k\pi<x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C. Найти объем пирамиды ABO_1O_2.

Ответ: $\frac{a^4}{24\sqrt{4b^2-2a^2}}$.

5. Утром из пункта A в пункт B отправляется по течению реки моторная лодка. Одновременно из B в A выходит катер, собственная скорость (т. е. скорость в стоячей воде) которого в 1,4 раза больше собственной скорости моторной лодки. Известно, что лодка и катер встречаются в 12 *ч* дня, потом лодка прибывает в пункт B не позже 15 *ч* дня, а катер прибывает в пункт A не раньше 15 *ч* дня. Найти время отправления лодки из пункта A в пункт B, если известно, что на путь из B в A лодка затрачивает не более 9 *ч*, а катер на путь из A в B затрачивает не менее 4,5 *ч*.

Ответ: 9 *ч* утра.

6. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$(2a+1)\cos^3 x+(16a^3-4a+1)\cos x-2\cos^7 x=0$$

является корнем уравнения

$$\cos^6 x=(1+a)\cos^2 x+8a^3-2a$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a=0$, $a=\frac{1}{2}$.

§ 46. Механико-математический факультет (инженерный поток), 1968 г.

Вариант 1

1. Сумма трех целых положительных чисел больше, чем их произведение, а сумма двух из этих чисел равна 33. Найти все такие числа.

Ответ: 32, 1, 1.

2. Решить систему уравнений:

$$(2^x + 1)\,2^{y+1} = 9,$$
$$\sqrt{x + y^2} = x + y.$$

Ответ: $x_1 = 0,\ y_1 = 2\log_2 3 - 2;$
$x_2 = 3,\ y_2 = -1.$

3. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ основанием является трапеция $ABCD$, а боковые грани OAD и OBC перпендикулярны основанию. Площадь грани OAB равна 9, площадь грани OCD равна 20, ребро AB равно 3, ребро CD равно 5. Найти объем пирамиды.

Ответ: $6\sqrt{7}$.

4. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = 2|x - 1| + |x + 3| - 2|x - a^2 - a|$$

больше единицы.

Ответ: $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. Сумма квадратов четырех целых положительных чисел больше, чем половина квадрата их произведения, а сумма первых степеней этих чисел равна 42. Найти все такие числа.

Ответ: 39, 1, 1, 1.

2. Решить систему уравнений:

$$(x - y)^4 = 13x - 4,$$
$$\sqrt{x + y} + \sqrt{3x - y} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{5}{16},\ y_1 = \dfrac{13}{16};$

$x_2 = \dfrac{5}{16},\ y_2 = -\dfrac{3}{16}.$

3. В треугольной пирамиде $OABC$ боковые грани OAC и OAB перпендикулярны основанию. Через вершину O под углом 45° к основанию проведено сечение, пересекающее ребро AB в точке D и ребро AC в точке E, причем DE параллельно BC. Площадь сечения ODE равна 1, площадь грани OBC равна 6, ребро BC равно 4. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

4. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2|x + a - 1|$$

меньше трех.

Ответ: $-1 < a < 1$.

Вариант 3

1. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из этих чисел равна 28. Найти все такие числа.

Ответ: 26, 1, 1, 1.

2. Решить систему уравнений:

$$x^2 + 2x \sin y + 3 \cos y = 0,$$
$$\arcsin\left(\frac{x}{2} + \sin y\right) = y - \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5})$,

$y = \arccos\frac{1}{4}$.

3. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ плоскости боковых граней OAB, OBC, OCD, OAD образуют с плоскостью основания углы, равные соответственно 60°, 90°, 45°, 90°. Основание $ABCD$ — равнобочная трапеция, ребро AB равно 2, площадь основания равна 2. Найти поверхность пирамиды.

Ответ: $6\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4$.

4. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$$

меньше двух.

Ответ: $-\frac{8}{3} < a < -1$, $0 < a < \frac{5}{3}$.

Вариант 4

1. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем квадратный корень из суммы их квадратов, а сумма этих чисел равна 45. Найти все такие числа.

Ответ: 42, 1, 1, 1

2. Решить систему уравнений:

$$x^2 \operatorname{tg}^2 y\,(\operatorname{tg}^2 y - 2) = 1 - 2x,$$
$$\operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} y) = 2y.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 0$;

$x_2 = 3$, $y_2 = \frac{\pi}{6}$;

$x_3 = 3$, $y_3 = -\frac{\pi}{6}$.

3. Через вершину O треугольной пирамиды $OABC$ проведено сечение, пересекающее ребра AB и AC в точках D и E. Грани OAB и OAC перпендикулярны основанию, объем пирамиды равен 16, ребро OA равно 4, ребро BC равно 4, площадь сечения равна 5. Найти DE.

Ответ: 2 (если $DE \parallel BC$).

4. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = ax + |x^2 - 4x + 3|$$

больше 1.

Ответ: $1 < a < 4 + 2\sqrt{2}$.

§ 47. Физический факультет, 1968 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$$

Ответ: $0 < x < 2$, $x > 4$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$\sin x + \cos(a + x) + \cos(a - x) = 2.$$

Ответ: при $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant a \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\arcsin \frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + n\pi.$$

3. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы — 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

Ответ: 8.

4. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $\frac{1}{2}$. Найти острые углы треугольника.

Ответ: $A = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = \frac{\pi}{4} \mp \arccos\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. В правильной треугольной пирамиде высота равна h и сторона основания равна a. Одна из вершин основания является центром сферы касающейся противоположной грани пирамиды. Найти площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

Ответ: $\frac{9a^2h^2}{a^2 + 12h^2} \arccos \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}}$.

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log_x \left| \frac{1 - \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin 2x}{\cos^2 x} \right| < 1.$$

Ответ: $k\pi < x < k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$,

$k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2}$,

$k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} < x < k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{2}$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$a \sqrt[4]{1+x} + \frac{a}{x} \sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{x}.$$

Ответ: при $0 < a < 1$ $x = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{1 - \sqrt[5]{a^4}}$,

при $a \leqslant 0$ и при $a \geqslant 1$ решений нет.

3. Из города A в 9 *ч* утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью 12 *км/ч*. Спустя 2 *ч* вслед за ним из A выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 *км/ч* двигался равнозамедленно, так что за час его скорость уменьшалась на 2 *км/ч*. Автомобилист, едущий им навстречу в город A с постоянной скоростью 50 *км/ч*, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста. Успеет ли автомобилист к 19 *ч* этого дня прибыть в город A?

Ответ: успеет.

4. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D, такой, что $DA = DB$. Найти длину стороны BC.

Ответ: $a = \sqrt{b(b+c)}$.

5. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая вращением ее вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определить угол между хордой и диаметром.

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\log_5 \sin x > \log_{125} (3 \sin x - 2).$$

Ответ: $2k\pi + \arcsin \frac{2}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\pi - \arcsin \frac{2}{3}$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

Ответ: при $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$,
при $a\leqslant 0$ и при $a>1$ решений нет.

3. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 72 коп., а за все книги — 6 руб. 60 коп. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше чем 4 руб. 44 коп. Сколько куплено тетрадей?

Ответ: 2.

4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD; длины сторон равны: $AB=1$, $CD=4$, $AD=5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD?

Ответ: $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{2}{3}$.

5. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение объемов конуса и шара равно двум. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

Ответ: 2.

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x-8}+2}{\log_{0,5}x-1}<1.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2^{15}}<x<\dfrac{1}{2^9}$, $x>2^9$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$\sin x+\sqrt{2}\sin(a-x)=1.$$

Ответ: при $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant a\leqslant 2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}$

$$x=-\arcsin\frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}+n\pi.$$

3. Между пунктами A и B расположен пункт C, причем $AC=17$ *км*, $BC=3$ *км*. Из пункта A в пункт B выехала машина, которая, не проехав и 2 *км*, остановилась. Через некоторое время она двинулась дальше в пункт B, и в этот же момент из пункта C в пункт B отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист, каждый из которых, достигая B, сразу же поворачивает назад. С кем из них раньше поравняется машина, если скорость машины в 4 раза больше скорости велосипедиста и в 8 раз больше скорости пешехода?

Ответ: машина вначале встретит велосипедиста.

4. В остроугольный треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр лежит на стороне AB, а дуга касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, касающейся дуги этого полукруга и сторон AC и BC треугольника, если $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \alpha$.

Ответ: $\dfrac{ab\sin\alpha}{a+b}\,\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

5. Сфера касается боковых ребер правильной прямой шестиугольной призмы, основание которой лежит вне сферы. Найти отношение площади боковой поверхности призмы, заключенной внутри сферы, к площади поверхности сферы, находящейся вне призмы.

Ответ: $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Вариант 5

1. Решить неравенство:

$$\cos[\pi(x^2-10x)] - \sqrt{3}\sin[\pi(x^2-10x)] > 1.$$

Ответ: $5-\sqrt{25+2k} < x < 5-\sqrt{\frac{73}{3}+2k}$,

где k принимает все целые значения, такие, что $k \geqslant -12$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$x+\sqrt{x}=a.$$

Ответ: при $a \geqslant 0$ $x = a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}}$;

при $a < 0$ решений нет.

3. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то, по крайней мере, один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Ответ: 12.

4. Прямоугольные треугольники ACB и ADB лежат по одну сторону от их общей гипотенузы AB. Угол CAB равен α, угол ABD равен β, причем и α и β больше $\frac{\pi}{4}$. На AD взята точка M, а на CB точка N так, что отрезок MN параллелен AB. Найти отношение площадей треугольников AMC и BND.

Ответ: $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$.

5. Правильный тетраэдр помещен внутрь шара радиуса r так, что три его вершины лежат на поверхности шара, а центр шара находится внутри тетраэдра на расстоянии d от его четвертой вершины. Найти сторону тетраэдра.

Ответ: $d\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{r^2-\frac{d^2}{3}}$.

Вариант 6

1. Решить неравенство:

$$\log_{|\sin x|}(x^2-8x+23) > \frac{3}{\log_2|\sin x|}.$$

Ответ: $3<x<\pi$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<x<5$.

2. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

$$|\cos x|^{\operatorname{ctg}2x+a\operatorname{ctg}x}=1.$$

Ответ: при $a>-\frac{1}{2}$ $x=k\pi\pm\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+2a}=$

$$=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{a}{a+1}\right);$$

при $a\leqslant-\frac{1}{2}$ решений нет.

3. Две трубы, действуя вместе в течение одного часа, наполняют водой 3/4 бассейна. Если сначала первая труба наполнит одну четвертую часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до 3/4 бассейна, то на это понадобится 2,5 *ч*. Если первую трубу включить на час, а вторую — на полчаса, то они наполнят бассейн более чем на половину. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

Ответ: первая за 2 *ч*, вторая за 4 *ч*.

4. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника так, что одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$.

5. Четыре равных шара радиуса r внешним образом касаются друг друга так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

Ответ: $r\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

§ 48. Химический факультет, 1968 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\cos 3x+3\cos x+3\sin 2x=0.$$

Ответ: $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{6}$.

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{13}-5}{2}<x\leqslant 1.$

3. Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы

Ответ: $r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$

4. Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Более чем через час после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжал путь пешком, двигаясь в 4,5 раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист — через 5/8 *ч* после поломки, а пешеход — через 10,8 *ч* после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал в два раза большее расстояние, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 *ч* более позднему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?

Ответ: через 4 *ч*.

Вариант 2

1. Решить уравнение:

$$2\cos 2x+\sin 3x-2=0.$$

Ответ: $x=k\pi,$

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}.$$

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$$

Ответ: $x\leqslant -2,$

$$-1\leqslant x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}.$$

3. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определить высоту призмы.

Ответ: $\frac{r}{3}\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right).$

4. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 *м* больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время, на 2/3 *мин* большее, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.

Ответ: 36 *км/ч*.

Вариант 3

1. Решить уравнение: $\sin 3x - 3\sin x - 3\sin 2x = 0$.

Ответ: $x = k\pi$, $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

2. Решить неравенство: $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{x+4}$.

Ответ: $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leqslant 1$.

3. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

Ответ: $r\left(1+\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.

4. Первая и вторая бригады одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения всей работы. На выполнение работы ушло 5, 5 *ч*. Первая бригада за все время, пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 *ч* больше, чем это было на самом деле, она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, работа была бы выполнена в полтора раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?

Ответ: 2 *ч* 30 *мин*.

Вариант 4

1. Решить уравнение:

$$6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x.$$

Ответ: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1.$$

Ответ: $-5 \leqslant x < -\frac{9+\sqrt{61}}{8}$.

3. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Определить высоту цилиндра.

Ответ: $\frac{2r}{3}\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{9+6\sqrt{3}}\right)$.

4. В бассейн проведены три трубы. Первая и вторая трубы вместе наполняют его на 5 *ч* 20 *мин* быстрее, чем первая и третья трубы вместе. Если бы вторая труба наливала, а третья выливала воду из бассейна, то он на-

полнился бы на 21/16 *ч* быстрее, чем бассейн вдвое большего объема первой и второй трубами вместе. (Предполагается, что скорость, с которой третья труба наливает воду в бассейны, и скорость, с которой она выливает воду, равны.) За какой срок первая и вторая трубы вместе наполнят бассейн, если первая и третья трубы вместе наполняют его более чем за 8 *ч*?

Ответ: за 3 *ч*.

§ 49. Геологический факультет (отделение геофизики), 1968 г.

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения:

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

заключенные между π и $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{21\pi}{16}$, $\frac{11\pi}{8}$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD угла BAC и биссектриса CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB=21$, $AC=28$ и $CB=20$.

Ответ: 4.

3. Упростив $\log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9$, решить неравенство:

$$2\log_{\frac{1}{4}}(x+5)>\frac{9}{4}\log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9+\log_{\sqrt{x+5}} 2.$$

Ответ: $-4<x<-3$, $x>-1$.

4. На лыжных соревнованиях на дистанцию 10 000 *м* сначала вышел со старта первый лыжник, а через некоторое время после него — второй, причем скорость второго лыжника была на 1 *м/сек* больше скорости первого. В момент, когда второй лыжник догнал первого, первый увеличил свою скорость на 2 *м/сек*, а скорость второго лыжника осталась без изменения. В результате второй лыжник финишировал через 7 *мин* 8 *сек* после первого. Если бы длина дистанции была на 500 *м* больше, то второй лыжник финишировал бы на 7 *мин* 33 *сек* позже первого. Найти, сколько времени прошло между выходом со старта первого и второго лыжников.

Ответ: 2 *мин*.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения:

$$\sqrt{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}+2\sin x=0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол $BAD = 30°$ и угол $ADC = 60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 13.

3. Упростив $2^{151\log_2 \sqrt{2}\sqrt{3}}$, решить неравенство:

$$x^3 > 2^{151\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}} \cdot 3^{\log_{\sqrt{x}}3}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < 1,\ x > 9.$

4. Вместимость бака A на 900 *л* меньше вместимости бака B. Первый насос подключают к пустому баку A, и он начинает наполнять бак водой. Когда бак наполнится наполовину, включают второй насос, который выкачивает воду из бака. В результате бак A оказывается полным через 40 *мин* после включения первого насоса. Затем то же самое проделывают с баком B (к пустому баку B подключают первый насос и, после того как он наполнит бак B наполовину, включают второй насос), и бак B оказывается наполненным через 52 *мин* после того, как к нему подключили первый насос. Найти вместимость бака A и производительность каждого из насосов, если известно, что один второй насос выкачивает всю воду из полного бака A за 30 *мин*.

Ответ: объем первого бака 3000 *л*, второго 3900 *л*; первый насос вливает 100 *л/мин*, второй выливает 40 *л/мин*.

Вариант 3

1. Найти все решения уравнения:

$$\cos 2x + \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}} = 0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и 2π.

Ответ: $\frac{19\pi}{12}$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD угла ABC и биссектриса AF угла BAC (точка D лежит на стороне AC, а точка F — на стороне BC). Найти отношение площадей треугольников ABC и CDF, если известно, что $AB = 6$, $BC = 4$ и $AC = 3$.

Ответ: $\frac{15}{2}$.

3. Упростив $\log^2_{2\sqrt{2}} \frac{1}{4}$, решить неравенство:

$$\log_3(7-x) \leqslant \frac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}} \frac{1}{4} + \log_{7-x} 9.$$

Ответ: $-2 \leqslant x < 6,\ \frac{20}{3} \leqslant x < 7.$

4. Из порта A в порт C отправился пароход, который должен по пути пройти мимо маяка B, причем расстояние от A до B равно 140 *км*, а расстояние от B до C равно 100 *км*. Через 3 *ч* после выхода парохода вдогонку за ним вышел из порта A быстроходный катер, который, догнав пароход, передал приказание увеличить скорость на 5 *км/ч*. Приказание было немедленно выполнено, и в результате пароход прошел мимо маяка B на полчаса раньше и прибыл в порт C на полтора часа ранее, чем он бы это сделал, если бы не увеличил скорости. Найти первоначальную скорость парохода и скорость катера.

Ответ: 20 *км/ч*, 60 *км/ч*.

Вариант 4

1. Найти все решения уравнения:

$$\sin x + \sin\frac{\pi}{8}\sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} = 0,$$

заключенные между $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{13\pi}{4}$.

2. Дана трапеция $PQRN$ с основаниями $PN = 8$ и $QR = 4$, стороной $PQ = \sqrt{28}$ и углом $RNP = 60°$. Через точку R проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 6.

3. Упростив $7^{\sqrt[\log_3 5]{7}}$, решить неравенство:

$$x^4 \cdot 7^{\sqrt[\log_3 5]{7}} \leqslant 5^{-\log_{\frac{1}{x}} 5}.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{5}$, $1 < x \leqslant \sqrt[4]{5}$.

4. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Через некоторое время из пункта A в пункт B выехал велосипедист, скорость которого в четыре раза больше скорости пешехода. В пункт B велосипедист и пешеход прибыли одновременно. За 3 *ч* до их прибытия в пункт B из него выехал автобус в пункт A со скоростью, на 20 *км/ч* большей, чем скорость велосипедиста. Определить скорость пешехода, если известно, что автобус встретил пешехода на 40 *мин* раньше, чем велосипедиста.

Ответ: 5 *км/ч*.

§ 50. Геологический факультет (общее отделение), 1968 г.

Вариант 1

1. Два насоса перекачали 64 кубометра воды. Они начали работать одновременно и с одинаковой производительностью. После того как первый из них перекачал 9 кубометров воды, его остановили на 1 *ч* 20 *мин*. После перерыва производительность первого насоса увеличили на один кубометр в час. Определить начальную производительность насоса, если первый насос перекачал 33 кубометра воды и оба насоса окончили работу одновременно.

Ответ: $2 м^3/ч$.

2. Упростив $2^{2\log_4 6-1}$, решить неравенство:

$$25^x - 2^{2\log_4 6-1} < 10 \cdot 5^{x-1}$$

Ответ: $x < \log_5 3$.

3. Найти все решения уравнения:

$$\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0,$$

заключенные между π и $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{11\pi}{8}$, $\frac{21\pi}{16}$.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD угла BAC и CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$ и $CB = 20$.

Ответ: 4.

Вариант 2

1. Две машины подметали участок шоссе между пунктами A и B. Они выехали одновременно (первая из пункта A, а вторая из пункта B) и двигались навстречу друг другу каждая со своей постоянной скоростью. Когда вторая машина проехала 14 *км*, она встретила первую. Если бы первая машина работала одна, то после 4 *ч* работы ей бы еще оставалось подметать 23 *км* шоссе. Какова скорость первой машины, если известно, что вторая машина за 4 *ч* подметала на один километр меньше, чем первая за 3 *ч*?

Ответ: 3 *км/ч*.

2. Упростив $\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4$, решить неравенство:

$$\log_3 x - \log^2_3 x \leqslant \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4.$$

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{1}{3}$, $x \geqslant 9$.

3. Найти все решения уравнения:

$$\sqrt{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}+2\sin x=0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3\sqrt{39}$ и $BC=\sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол $BAD=30°$ и угол $ADC=60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 13.

Вариант 3

1. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 34 *км*. В 4 *км* от пункта A первый пешеход (вышедший из пункта A) сделал остановку на 1 *ч* 30 *мин*. После остановки он увеличил скорость на 2 *км* в час и встретил второго пешехода в 18 *км* от пункта B. Если бы первый пешеход не делал остановки и шел все время с первоначальной скоростью, то пешеходы встретились бы на полпути. Определить скорость второго пешехода.

Ответ: 4 *км/ч*.

2. Упростив $25^{\frac{1}{\log_3 5}}$, решить неравенство:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x<2^{3-x}+25^{\frac{1}{\log_3 5}}.$$

Ответ: $x>-\log_2 9$.

3. Найти все решения уравнения:

$$\cos 2x+\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и 2π.

Ответ: $\frac{19\pi}{12}$.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD угла ABC и AF угла BAC (точка D лежит на стороне AC, а точка F — на стороне BC). Найти отношение площадей треугольников ABC и CDF, если известно, что $AB=6$, $BC=4$ и $AC=3$.

Ответ: $\frac{15}{2}$.

Вариант 4

1. Автомобиль выехал из города A в город B и через 2 *ч* остановился на 45 *мин*. После этого он продолжал движение к городу B, увеличив первоначальную скорость на 20 *км/ч*, и прибыл в город B. Если бы автомобиль ехал без остановки с первоначальной скоростью, то на путь из A в B он затратил бы столько же времени. Найти первоначальную скорость автомобиля, если расстояние между городами A и B равно 300 *км*.

Ответ: 60 *км/ч*.

2. Упростив $\log_{4\sqrt{2}} 16$, решить неравенство:

$$\log^2_2 x + 3\log_2 x \geqslant \frac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16.$$

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{1}{16}$, $x \geqslant 2$.

3. Найти все решения уравнения:

$$\sin x + \sin\frac{\pi}{8}\sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} = 0,$$

заключенные между $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{13\pi}{4}$.

4. Дана трапеция $PQRN$ с основаниями $PN = 8$ и $QR = 4$, стороной $PQ = \sqrt{28}$ и углом $RNP = 60^\circ$. Через точку R проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 6.

§ 51. Географический факультет, 1968 г.

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения:

$$4\cos^3\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\sin x = 8\cos\frac{x}{2}.$$

Ответ: $x = (2k+1)\pi$, $x = 2k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{2}$.

2. Найти все решения системы:

$$\log_9(x^2+2) + \log_{81}(y^2+9) = 2,$$
$$2\log_4(x+y) - \log_2(x-y) = 0.$$

Ответ: $x = 5$, $y = 0$.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 8 *см*. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 9 *см*. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\frac{224}{3}$ *см*^{3}.

4. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1.$$

Ответ: $-6 \leqslant x < 0,\ 3 < x \leqslant 4$.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения:

$$\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2}.$$

Ответ: $x = 2(2k+1)\pi$,

$x = 4k\pi + (-1)^k\frac{2\pi}{3}$.

2. Найти все решения системы:

$$\log_3(x^2+1) - \log_3(y-2) = 0,$$
$$\log_2(x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{3},\ y_1 = 4;$

$x_2 = -\sqrt{3},\ y_2 = 4.$

3. Высота прямой призмы 1 *м*, ее основанием служит ромб со стороной 2 *м* и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая призму плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$ *м*^{2}.

4. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1.$$

Ответ: $-5 \leqslant x < -1,\ x > 1$.

Вариант 3

1. Найти все решения уравнения:

$$3\sin 4x = 4\sin^3 2x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2},\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

2. Найти все решения системы:

$$\log_3(2x - y + 2) = 2,$$
$$\log_2(x+y) - \log_{\sqrt{2}}(y+1) = -1.$$

Ответ: $x = 5,\ y = 3$.

3. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6 *см*. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 *см*. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Ответ: 4 *см*.

4. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} < 1.$$

Ответ: $-2\sqrt{13} \leqslant x < -4$, $2 < x \leqslant 2\sqrt{13}$.

Вариант 4

1. Найти все решения уравнения:

$$2\sqrt{3}\sin 2x\,(3+\cos 4x) = 7\sin 4x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$.

2. Найти все решения системы:

$$\log_2(x^2 - 3y^2 - 7y + 11) = \log_1 9,$$
$$\log_3(x+2y) + \log_3(x-2y) = \log_9 4.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{102}$, $y_1 = 5$; $x_2 = 3\sqrt{2}$, $y_2 = 2$.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

Ответ: $\frac{5ab}{8\sqrt{2}}$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1.$$

Ответ: $-1 < x < 15$.

§ 52. Биолого-почвенный факультет, 1968 г.

Вариант 1

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+2) > -\log_{\frac{1}{2}}4.$$

Ответ: $-2 < x < \frac{5}{3}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$(2\sin^4\frac{x}{2} - 1)\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}} = 2.$$

Ответ: $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

3. Решить неравенство:

$$x^2 + 2|x + 3| - 10 \leqslant 0.$$

Ответ: $1 - \sqrt{17} \leqslant x \leqslant \sqrt{5} - 1$.

4. Бак водокачки наполняется водой с помощью нескольких насосов. Сначала включили три насоса одинаковой производительности, а через 2,5 *ч* после начала их работы подключили еще два насоса другой, но также одинаковой производительности. В результате через час после подключения насосов воды в баке до полного объема не хватало 15 $м^3$, а еще через час бак был полон. Один из двух подключенных позже насосов мог бы наполнить бак за 40 *ч*. Найти объем бака.

Ответ: 60 $м^3$.

5. В круг вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и угол $BAC = \alpha$. Из вершины C проведена прямая, составляющая с AC угол, равный $\frac{\alpha}{4}$, и проходящая внутри треугольника, которая пересекает окружность в точке E. Эта прямая пересекается с биссектрисой угла BAC в точке F. Вершина A треугольника соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников AFC и AEC.

Ответ: $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{7\alpha}{4}}$.

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log(2 - x) - \log_2(x - 1) > \log_{\sqrt{2}} 3.$$

Ответ: $1 < x < \frac{11}{10}$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.

3. Решить неравенство:

$$|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$, $x \geqslant \frac{1}{2}$.

4. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 *ч* после его выезда из города B выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посредине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 *ч* после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 *км* ближе к A. Найти расстояние между A и B.

Ответ. 180 *км*.

5. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = \beta$. Параллельно AC проведена средняя линия треугольника, продолженная до пересечения с окружностью в точках D и E. Вершина B

треугольника соединена отрезками прямых с точками D и E. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3-\cos\beta}}{4\sqrt{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}$.

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4.$$

Ответ: $1 < x < 3$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\sin 2x \cdot \sin 6x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{k\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8}$, $x = \dfrac{k\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{12}$.

3. Решить неравенство:

$$x^2 - |3x+2| + x \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -2-\sqrt{2}$, $x \geqslant 1+\sqrt{3}$.

4. Из двух городов A и B выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста, причем до их встречи велосипедист, выехавший из A, проехал расстояние в полтора раза больше, чем велосипедист, выехавший из B. Велосипедист, выехавший из A, прибыл в B через 1 *ч* 20 *мин* после встречи, а другой велосипедист через 2 *ч* после встречи еще находился в 10 *км* от A. Найти расстояние между A и B.

Ответ: 40 *км*.

5. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $AB = BC$ и угол $ABC = \beta$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке D и окружность в точке E. Вершина B соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников ABE и BDE.

Ответ: $\dfrac{1-\sin\dfrac{\beta}{2}}{1+\sin\dfrac{3\beta}{2}}$.

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\log_2\left[(x-3)(x+2)\right] + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < -\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3.$$

Ответ: $3 < x < 7$.

2. Найти все решения уравнения:

$$(3-2\sin^2 2x)\frac{1}{\sin^2 x} = 2.$$

Ответ: $x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$.

3. Решить неравенство:

$$|x^2 - 3| + 2x + 1 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -1-\sqrt{3}$, $x \geqslant 1-\sqrt{5}$.

4. Из города A в город B выходит пешеход, а через час после него — второй. Если бы скорости пешеходов оставались все время неизменными, то они прибыли бы в город B одновременно. Однако, пройдя 7/10 расстояния от A до B, первый пешеход увеличил свою скорость так, что она стала равной 3/2 первоначальной. В результате в момент его прибытия в город B второй пешеход находился на расстоянии 2,5 *км* от B (скорость второго пешехода не менялась). Найти скорость второго пешехода, если известно, что расстояние от A до B равно 20 *км*.

Ответ: 5 *км/ч*.

5. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $AB = BC$ и угол $BAC = \alpha$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC до пересечения с окружностью в точке E, а также биссектриса угла EAC, пересекающая окружность в точке D. Вершина B соединена с точками D и E отрезками прямых. Найти отношение площадей треугольников ABE и ABD.

Ответ: $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{7\alpha}{4}}$.

§ 53. Экономический факультет (отделение экономической кибернетики), 1968 г.

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\log_{4x-(x^2+3)}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{x}+\cos\frac{\pi}{x}\right)=0.$$

Ответ: $x=\dfrac{3}{2}$.

2. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Найти разность отрезков диагонали AC, лежащих вне окружности, если высота трапеции h, а углы при основании α и δ.

Ответ: $\dfrac{h}{2}\dfrac{\left|\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}}$, если $\alpha+\delta\neq\pi$. Если же $\alpha+\delta=\pi$ (трапеция вырождается в ромб), то искомая разность равна нулю.

3. Несколько одинаковых кубов, приложенных друг к другу гранями, образуют куб K. Известно, что на поверхность его выходят грани n маленьких кубов. Определить отношение объема куба K к объему маленького куба. При каких n задача разрешима?

Ответ: $\dfrac{n}{6}\sqrt{\dfrac{n}{6}}$; $n=6k^2$,

где k — любое натуральное число.

4. Доказать, что $\lg\lg(2^{10000!}) > 2500$.

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$.

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{3}\sin x+\cos x}(x^2+2x+1)\geqslant 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}<x<0$, $2k\pi<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$, где k — любое целое число.

2. В остроугольном треугольнике ABC известны: сторона BC, равная a, углы $B=\beta$, $C=\gamma$. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Ответ: $\frac{a}{2\sin(\beta+\gamma)}\sqrt{1-8\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$.

3. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Ответ: 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа.

4. Решить неравенство:

$$\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0.$$

Ответ: $x=0$, $y=1$.

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)}(\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x)\geqslant 1.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

2. Окружность с центром O_1 касается окружности с центром O_2 изнутри. Хорда AB окружности O_2 касается окружности O_1 и образует угол α с общей к окружностям касательной. Найти длину хорды AB, если радиус окружности O_1 равен r, а радиус окружности O_2 равен R.

Ответ: $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{R^2(1-\cos\alpha)+2rR\cos\alpha-r^2(1+\cos\alpha)}$.

3. Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки деревьев имеются полуторатонки, трехтонки, пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке — 45 деревьев, на пятитонке — 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 руб., для трехтонки — 15 руб., для пятитонки — 24 руб. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается.

Ответ: 2 трехтонки и 20 пятитонок.

4. Решить неравенство:

$$-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geqslant 1.$$

Ответ: $x=1$, $y=0$.

Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+3\right)\geqslant 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}<x<2$, $-\frac{\pi}{6}<x\leqslant 1$, $2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k — любое целое число, не равное нулю

2. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и вокруг него можно описать окружность. Найти сторону AB, если известны $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$ и радиус R описанной окружности.

Ответ: $AB=\dfrac{4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}}$

3. Предполагается использовать 2000 руб на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15 дней, на 27 дней, на 45 дней. Стоимость их соответственно 21 руб., 40 руб., 60 руб. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим?

Ответ: 2 путевки по 40 руб. и 32 путевки по 60 руб

4. Решить неравенство:

$$y-|\sec x|-\sqrt{1-y-x^2}\geqslant 0.$$

Ответ: $x=0$, $y=1$.

Вариант 5

1. Решить неравенство:

$$\log_{\sin x-\cos x}(\sin x-5\cos x)\geqslant 1.$$

Ответ: $2k\pi+\operatorname{arctg}5<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<\pi+2k\pi$.

2. В трапеции $ABCD$ углы при основании α и β, высота трапеции h нижнее основание равно a; O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, BCD, CDA и DAB. Найти площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$.

Ответ: $\dfrac{h}{4}\dfrac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\left[a-\dfrac{h}{2}\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right]$.

3. На 100 руб. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 руб.; набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 руб. и набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 руб. Сколько каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

Ответ: 1 набор за 4 руб. и 16 наборов по 6 руб.

4. Решить неравенство:

$$x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\geqslant 1.$$

Ответ: $x=1$, $y=0$.

§ 54. Экономический факультет (отделение политической экономии), 1968 г.

1. Одна машина проехала 276 *км*, вторая проехала 228 *км*. Первая машина находилась в пути на 1 *ч* больше, чем вторая. Найти скорости машин (скорости считаются постоянными), если скорость второй машины на 7 *км/ч* больше, чем скорость первой.

Ответ: 69 *км/ч* и 76 *км/ч*.

2. Из точки A, лежащей на продолжении диаметра KL окружности O, в сторону точки L проведена к этой окружности касательная AB (B — точка касания), образующая с диаметром KL угол α.

Найти площадь, заключенную между сторонами угла и дугой LB, если радиус окружности равен R.

Ответ: $\frac{1}{2}R^2 \operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

3. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{4}} x.$$

Ответ: $x \geqslant 1$.

Вариант 2

1. За 5 *ч* мотоциклист проезжает больше, чем велосипедист за 4 *ч*, на 259 *км*. За 10 *ч* велосипедист проезжает больше, чем мотоциклист за 2 *ч*, на 56 *км*. Определить скорость велосипедиста (обе скорости считаются постоянными).

Ответ: 19 *км/ч*.

2. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен α, сторона AB равна a. Из вершины прямого угла B опущена высота BE. В треугольнике BEA проведена медиана ED. Найти площадь треугольника AED.

Ответ: $\frac{a^2}{8}\sin 2\alpha$.

3. Решить уравнение:

$$\cos 7x + \cos x = 4\cos 4x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$.

4. Решить неравенство:

$$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0.$$

Ответ: $0 < x < 2$.

Вариант 3

1. 50 телевизоров на 7590 руб. дороже, чем 120 радиоприемников, 26 телевизоров и 18 радиоприемников стоят 10 620 руб. Сколько стоит телевизор?

Ответ: 351 руб.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B$ прямой, $\angle A = \alpha$, $AB = c$. На продолжении гипотенузы AC (в сторону точки C) взята точка D так, что $AD = r$. Найти площадь треугольника BCD.

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,(r\cos\alpha - c)$.

3. Решить уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 7x\right) + \sin x = 6\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right).$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{3}$.

4. Решить неравенство:

$$x^4 - 12x^2 + 36 \leqslant 0.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{6}$.

Вариант 4

1. 52 брикета пломбира весят на 10 *кг* больше, чем 50 стаканчиков фруктового мороженого. 4 брикета пломбира весят на 0,5 *кг* меньше, чем 25 стаканчиков. Сколько весит брикет пломбира?

Ответ: 250 *г*.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BE и основание высоты E соединено с точкой D, лежащей на BC. Найти площадь треугольника DCE, если $\angle A = \alpha$, $AC = b$, $DC = r$.

Ответ: $\frac{1}{2}r\,b\sin^2\alpha\cos\alpha$.

3. Решить уравнение:

$$\sin 5x + \sin 7x = 5\sin 6x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{6}$.

4. Решить неравенство:

$$-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geqslant 0.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 81$, $x \geqslant 1296$.

Вариант 5

1. Расстояние между пунктами A и B равно 56,2 *км*. Из пункта A в B вышел человек. Через 2 *ч* навстречу ему из пункта B вышел другой человек. Через 3 *ч* после выхода второго человека расстояние между ними было 24,3 *км*, а еще через 3 *ч* они встретились. Определить скорости путников, считая их постоянными.

Ответ: $v_1 = 3{,}8$ *км/ч*, $v_2 = 4{,}3$ *км/ч*.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BE. Из точки C восставлен перпендикуляр к AC, на котором отложен отрезок CD, равный r. Найти площадь треугольника CED, если $\angle A = \alpha$, $AB = c$.

Ответ: $\frac{1}{2}cr\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

3. Решить уравнение:

$$\sin x - \sin 9x = 3\cos 5x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$.

4. Решить неравенство:

$$4^x + 2^{x+1} - 6 \leqslant 0.$$

Ответ: $x < \log_2(\sqrt{7} - 1)$.

§ 55. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики), 1968 г.

Вариант 1

1. Совхоз располагает тракторами четырех марок *А*, *Б*, *В* и *Г*. Бригада из четырех тракторов (два трактора марки *Б* и по одному марок *В* и *Г*) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки *А* и одного трактора марки *В* тратит на эту работу три дня, а три трактора марок *А*, *Б* и *В* — четыре дня. За сколько времени выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

Ответ: $\frac{12}{7}$ дня.

2. Решить неравенство (все углы измеряются в радианах):

$$\cos(2 - 4x) + \cos(2 + 4x) \geqslant \sqrt{2\cos^2 2x + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$.

3. Решить уравнение:

$$x^{\frac{3}{(\log_3 x^2)^2}} = (\sqrt{x})^{-\log_3 x + \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}}}.$$

Ответ: $x_{1,2} = 3^{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$, $x_{3,4} = 3^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее.

4а) Найти все те значения параметра d, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - 6dx + 2 - 2d + 9d^2 = 0$$

действительны и больше, чем 3.

Ответ: $d > \frac{11}{9}$.

4б) Сколькими различными способами можно нарисовать на шахматной доске, имеющей, как обычно, 8×8 клеток, прямоугольник, стороны которого идут по границам клеток?

Ответ: 1296.

Вариант 2

1. Туристский клуб разработал маршруты нескольких походов:
I. Двухдневный байдарочный поход.
II. Двухдневный велосипедный поход.
III. Восьмидневный комбинированный поход (четыре дня на байдарке, четыре дня пешком).
IV. Пятидневный поход (один день на плоту, один день на байдарке, три дня пешком).
V. Шестидневный поход (три дня на плоту и три дня пешком). Третий маршрут длиннее второго на 40 *км*, второй длиннее первого на 80 *км*, а длина четвертого маршрута — 90 *км*. Предполагается, что при каждом данном способе передвижения за каждый день проходится одно и то же расстояние. Найти протяженность пятого маршрута.

Ответ: 90 *км*.

2. Решить неравенство (все углы измеряются в радианах):

$$\operatorname{ctg}(5+3x)(\operatorname{ctg}5+\operatorname{ctg}3x) \geqslant \sqrt{\operatorname{ctg}3x}-1.$$

Ответ: $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$.

3. Решить уравнение:

$$x^{\log_2^2(x^2)-\log_2(2x)-2}+(x+2)^{\log_{(x+2)^2}4}=3.$$

Ответ: $x=1$, $x=2$, $x=2^{-\frac{3}{4}}$.

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее.
4а) Найти все те значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-ax+2=0$$

действительны и находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

Ответ: $2\sqrt{2}<a<\frac{11}{3}$.

4б) В алфавите страны насчитывается шесть букв: *А*, *О*, *У*, *Н*, *М*, *К*. Под «словом длиной 7» будем понимать любой набор из семи букв. Каких слов больше: содержащих хотя бы одну букву *А* или не содержащих ни одной буквы *А*?

Ответ: слов, содержащих хотя бы одну букву *А*, больше чем слов, не содержащих ни одной буквы *А*.

Вариант 3

1. Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 *мин*; вторая, третья и четвертая, работая одновременно, — за 10 *мин*; вторая, третья и пятая — за 20 *мин* и, наконец, пятая и четвертая — за 30 *мин*. За сколько времени наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

Ответ: $\frac{60}{7}$ *мин*.

2. Решить неравенство (все углы измеряются в радианах):

$$\cos^2\left(2-\frac{y}{2}\right)-\sin^2\left(2+\frac{y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{\cos y}{1+\operatorname{ctg}^2 y}}.$$

Ответ: $y=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение:

$$7 \cdot x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}+\log_x 2} = 5 + (x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее.

4а) Найти все те значения параметра c, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 4cx + 1 - 2c + 4c^2 = 0$$

действительны и меньше, чем -1.

Ответ: $c > 1$.

4б) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, имеющей, как обычно, 8×8 клеток, восемь разноцветных фишек так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали стояла ровно одна фишка?

Ответ: $(8!)^2 = 1\,625\,702\,400$.

Вариант 4

1. В лаборатории имеется раствор поваренной соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3 : 2 : 1, то получится 15%-ный раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешении 24%-ный раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных весовых частей первого и третьего растворов, имеет концентрацию 10%. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2 : 1?

Ответ. 29%.

2. Решить неравенство (все углы измеряются в радианах):

$$\cos^2(3+x) + \sin^2(3-x) \leqslant \operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4} - \sqrt{\sin 2x}.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$.

3. Решить уравнение:

$$x^{\log_2^3(x^2) - 2\log_2 x + 1} + 2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}} = 2x.$$

Ответ: $x = 1$, $x = \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Из двух следующих задач выберите одну и решите ее.

4а) Найти все те значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - 2bx - 1 = 0$$

действительны и не превосходят по модулю 2.

Ответ: $|b| < \frac{3}{4}$.

4б) Имеется пятиугольник $ABCDE$. Стороны AE и DE разделены на 8 равных частей каждая. Сколько существует выпуклых шестиугольников, у которых одна из вершин лежит в точке B, вторая — в точке C, две лежат на DE и совпадают с точками деления и две последние лежат на AE и также совпадают с точками деления?

Ответ: $(C_7^2)^2 = 441$.

§ 56. Факультет психологии, 1968 г.

Вариант 1

1. Вычислить выражение:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}+\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha},$$

зная, что $\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ: 14.

2. У ювелира имелось два слитка, содержащие в равных количествах золото и серебро: первый весил 30 *г*, второй — 20 *г*. Ювелир отрезал от одного из слитков кусок и сплавил его с другим слитком. В результате получилось два новых слитка: один весил 40 *г* и содержал 36 *г* золота. Сколько золота содержалось первоначально в каждом из слитков? Предполагается, что процентное соотношение золота и серебра в любом куске одного и того же слитка совпадает с процентным содержанием в целом слитке.

Ответ: 18 *г* и 24 *г*.

3. Точка M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Найти на сторонах BC и AC такие точки N и P, чтобы периметр треугольника MPN был наименьшим. Вычислить для этого случая отношение площади треугольника MPN к площади треугольника ABC.
Ответ: N — середина BC, P — середина AC; искомое отношение равно 1/4.

4. Где на комплексной плоскости расположены числа $z = a + bi$, одновременно удовлетворяющие неравенству $|z - 2 - 2i| \leqslant \sqrt{2}$ и хотя бы одному из следующих равенств:

1) $a = 1$, 3) $a = 3$,
2) $b = 1$, 4) $b = 3$?

Ответ: 1) $1+i$, $1+3i$; 2) $1+i$, $3+i$; 3) $3+i$, $3+3i$; 4) $1+3i$, $3+3i$.

Вариант 2

1. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.

2. Турист два дня добирался из A в B на велосипеде и на попутных машинах. В первый день он затратил на дорогу 10 *ч*, а во второй — 8 *ч*, из которых 7 *ч* ехал на велосипеде, а 1 *ч* на попутной машине. Зная, что

скорость машин в 4 раза больше скорости велосипеда и что за первые 9 *ч* пути турист преодолел расстояние в 3 раза больше, чем за последующие 9 *ч*, найти, сколько часов из всего времени, затраченного на дорогу, турист проехал на велосипеде.

Ответ: 15 *ч* 20 *мин.*

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все боковые грани — равносторонние треугольники со стороной, равной 1 *м*. На сторонах BC и AD основания взяты точки M и N так, что $BM = MC$ и $AN = ND$. На продолжении ребра AS за точку A взята точка P так, что $AP = {}^1/_2$ *м*. Через точки P, M и N проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Ответ: $\frac{7\sqrt{13}}{61}$ *м*^{2}.

4. При каких действительных значениях a хотя бы одно комплексное число $z = x + yi$, удовлетворяющее равенству

$$|z + \sqrt{2}| = a^2 - 3a + 2,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству:

$$|z + i\sqrt{2}| < a^2?$$

Ответ: $a < 0$, $a > \frac{3}{2}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{9x-x^2-14}{7}}(\sin 3x - \sin x) = \log_{\frac{9x-x^2-14}{7}} \cos 2x.$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{13\pi}{6}$.

2. С трех полей в течение трех дней скашивали траву. С первого поля в первый день скосили всю траву за 16 *ч*. Во второй день со второго поля скосили всю траву за 11 *ч*, а в третий день с третьего поля скосили всю траву за 5 *ч*, причем 4 *ч* косили вручную, а 1 *ч* работала только сенокосилка. За второй и третий день вместе скосили в 4 раза больше травы, чем за первый. Сколько всего часов работала сенокосилка, если за 1 *ч* она скашивает в 5 раз больше травы, чем при косьбе вручную? Предполагается, что косилка не работала тогда, когда косили вручную, и не было перерыва в работе.

Ответ: 12 *ч*.

3. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = BC = 1$ *дм*. Через середины ребер AB и BC и точку P, лежащую на продолжении ребра B_1B, за точку B проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения, если $BP = \frac{1}{2}$ *дм* и $B_1B = 1$ *дм*.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{2}+1)$ *дм*^{2}.

4. При каких действительных значениях a любое комплексное число $z = x + yi$, удовлетворяющее равенству

$$|z - i\sqrt{2}| = (a+1)^2,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству:

$$|z - \sqrt{2}| > a^2 - 4a?$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < a < 4$.

Вариант 4

1. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{-x^2-6x}{10}} (\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \sin 2x.$$

Ответ: $x = -\frac{5\pi}{3}$.

2. Первый рабочий сделал 50 деталей; 40 из них он положил в первый ящик, а 10 — во второй, где уже находилось 30 деталей, изготовленных вторым рабочим. Из этих 30 деталей 10 оказались стандартными, а 20 — нестандартными. Сколько стандартных деталей сделал первый рабочий, если стандартная деталь в 3 раза дороже нестандартной и суммарная стоимость всех деталей во втором ящике в 2 раза выше суммарной стоимости всех деталей в первом ящике?

Ответ: 10.

3. Пусть M и N — середины ребер AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а на продолжении ребра D_1D за точку D взята точка P, такая, что $DP = \frac{1}{2}$ *дм*. Через M, N и P проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если ребро куба равно 1 *дм*.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *дм*^{2}.

4. При каких действительных значениях a хотя бы одно комплексное число $z = x + yi$, удовлетворяющее равенству

$$|z - ai| = a + 4,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству:

$$|z - 2| < 1?$$

Ответ: $a \leqslant -4$, $-\frac{8}{3} < a < -2$.

Петр Сергеевич Моденов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ С АНАЛИЗОМ ИХ РЕШЕНИЯ

Редактор Г. С. Уманский
Художественный редактор В. С. Эрденко
Технический редактор В. В. Новоселова
Корректоры Р. Ю. Грошева, О. С. Захарова

Сдано в набор 3/VIII 1968 г. Подписано к печати 10/II 1969 г. 60×90¹/₁₆. Типографская № 2. Печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 18,54. Тираж 200 тыс. экз. (Пл. 1968 г. № 350). Зак. 270.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 46 коп., переплет 13 коп.